

Brojni niz

June 20, 2025

Realan brojni niz je svako preslikavanje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Niz se označava sa $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ili samo $\{a_n\}$ gde je $f(n) = a_n$ i kaže se da je a_n opšti član niza $\{a_n\}$.

Primer 1. Članovi niza čiji je opšti član:

$$a_n = n^2 \quad \text{su} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 16, \quad \dots$$

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \text{su} \quad b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \quad b_4 = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

$$c_n = 2 \quad \text{su} \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = 2, \quad \dots$$

$$d_n = (-1)^n \quad \text{su} \quad d_1 = -1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = -1, \quad d_4 = 1, \quad \dots$$

Niz kod kog svi članovi imaju istu vrednost (kao c_n u prethodnom primeru) naziva se **stacionarni niz**.

$$a_n = \frac{n^2}{n+5} \quad a_1 = \frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{4}{7}, \quad a_3 = \frac{9}{8}, \quad \dots$$

Ako postoji realan broj G takav da je $a_n \leq G, \forall n \in \mathbb{N}$ kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa gornje strane** brojem G i broj G se tada naziva **gornje ograničenje niza**.

Ako postoji realan broj g takav da je $g \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa donje strane** brojem g i broj g se tada naziva **donje ograničenje niza**.

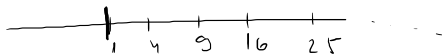
Ako postoji i gornje i donje ograničenje niza, kaže se da je niz ograničen.

Očigledno, gornje i donje ograničenje niza nije jedinstveno.

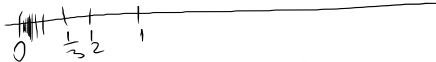
Najmanje gornje ograničenje niza naziva se **supremum** i označava se $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, a najveće donje ograničenje niza naziva se **infimum** i označava se $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

1 2 3 4 5 6 7 ...

Primer 2.



- ▶ Niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ je ograničen sa donje strane. Brojevi $0, -2, \frac{1}{2}, 1, \dots$ predstavljaju njegova donja ograničenja, a $\inf a_n = 1$ jer je $n^2 \geq 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz nije ograničen sa gornje strane.



- ▶ Niz $\{b_n\}$, $b_n = \frac{1}{n}$ je ograničen (i sa gornje i sa donje strane), a pošto je $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, to je $\sup b_n = 1$, a $\inf b_n = 0$.

- ▶ Niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ je takođe ograničen i važi $\sup c_n = \inf c_n = 2$.



- ▶ Niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ je ograničen jer $-1 \leq (-1)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, pa je $\sup d_n = 1$, a $\inf d_n = -1$.

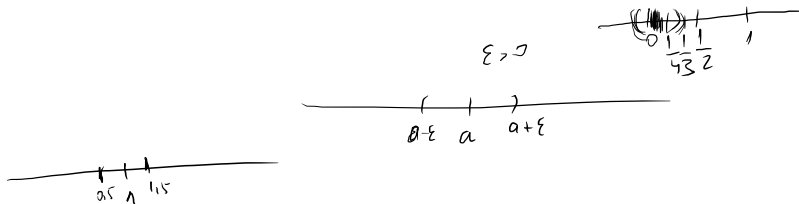


Za proizvoljan realan broj a , otvoren interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, gde je $\varepsilon > 0$, naziva se **ε -okolina** tačke a .

Realan broj a je **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ akko se u svakoj ε -okolini broja a nalazi beskonačno mnogo članova tog niza.

Primer 3.

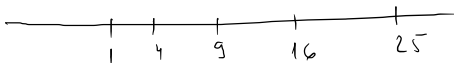
- ▶ Za niz $\{b_n\}$, $b_n = \frac{1}{n}$ tačka nagomilavanja je broj 0 jer se u proizvoljnoj ε -okolini tačke 0, tj. u intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza b_n .



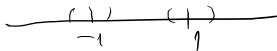
- ▶ Za niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ tačka nagomilavanja je broj 2 jer se svi članovi niza c_n nalaze u bilo kojoj okolini tačke 2.



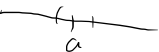
- ▶ Za niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ ne postoji tačka nagomilavanja jer se njegovi članovi neograničeno povećavaju.



- ▶ Za niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ tačke nagomilavanja su brojevi ± 1 jer se u proizvoljnoj ε -okolini oba broja nalazi beskonačno mnogo članova niza d_n .

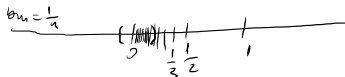


Realan broj a je **granična vrednost niza** $\{a_n\}$ akko se izvan proizvoljne ε -okoline broja a nalazi najviše konačno mnogo članova niza $\{a_n\}$, tj.



$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ovo znači da se za svako $\varepsilon > 0$ može pronaći prirodan broj n_0 , koji zavisi od ε , takav da se svi članovi niza $\{a_n\}$ čiji je indeks veći od n_0 nalaze u ε -okolini tačke a .



Ovaj iskaz se označava sa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ ili } a_n \rightarrow a \text{ kad } n \rightarrow \infty \text{ (} a_n \text{ teži u } a \text{ kad n teži u } \infty \text{)}.$$

Ako niz $\{a_n\}$ ima graničnu vrednost $a \in \mathbb{R}$ kaže se da je **konvergentan**, tj. da konvergira ili teži ka tački a . Ako niz nije konvergentan, on je **divergentan** tj. divergira.

Očigledno je granična vrednost niza ujedno i tačka nagomilavanja tog niza, kao i da niz sa više tačaka nagomilavanja nije konvergentan.

Niz $\{a_n\}$ teži u ∞ , kad n teži u ∞ , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ akko

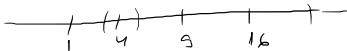
$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Niz $\{a_n\}$ teži u $-\infty$, kad n teži u ∞ , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ akko

$$(\forall M < 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

Za niz $\{a_n\}$ koji teži ka ∞ ili $-\infty$ kaže se da je divergentan u užem smislu. Dok se za niz koji je divergentan, ali ne u užem smislu kaže da je divergentan u širem smislu.

Primer 4.



Niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ nije konvergentan jer nema tačku nagomilavanja.

Niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ nije konvergentan jer ima dve tačke nagomilavanja.



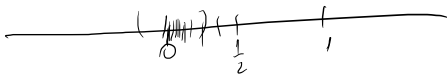
Niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ je konvergentan i važi $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$, jer se u svakoj ε -okolini tačke 2 nalaze svi članovi ovog niza.



Niz $\{b_n\}$, $b_n = \frac{1}{n}$ je takođe konvergentan i važi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ jer je

$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$, što znači da se unutar proizvoljne ε

-okoline tačke 0 nalaze svi članovi niza čiji je indeks veći od $\frac{1}{\varepsilon}$.



Osnovne osobine konvergentnih nizova:

- ▶ Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, tada je a jedina tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$.
- ▶ Konvergentan niz $\{a_n\}$ ima jedinstvenu graničnu vrednost i ta granična vrednost je jednaka tački nagomilavanja tog niza.
- ▶ Konvergentan niz je ograničen.
- ▶ Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, tada je on konvergentan i njegova granična vrednost je tačka nagomilavanja.

- ▶ Ako su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n$, za svako $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, tada je $a \leq b$.
- ▶ Ako su nizovi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$, za svako $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ onda je i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.
- ▶ Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i niz $\{b_n\}$ takav da je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

$$\cancel{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \cancel{c_n}$$

Handwritten diagram illustrating the squeeze theorem. It shows the expression $\cancel{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \cancel{c_n}$. The terms a_n and c_n are crossed out with diagonal lines. The limit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ is circled. Above the circle, the letter 'a' is written twice, with arrows pointing from the circle to each 'a'. Below the circle, the expression $n \rightarrow \infty$ is written.

Računske operacije sa graničnim vrednostima:

Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i c konstanta, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tada je:

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ca$;

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$;

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$;

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$, gde je $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$.

Niz $\{a_n\}$ je monotono:

- ▶ **rastući** ako je $a_n < a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **opadajući** ako je $a_n > a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **nerastući** ako je $a_n \geq a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **neopadajući** ako je $a_n \leq a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je monoton ako ima bilo koju od ovih osobina.

Princip monotonije: svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Teorema: Niz $\{a_n\}$ čiji je opšti član $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je konvergentan.

Ideja dokaza: Može se pokazati da je ovaj niz ograničen, tj. da je $2 \leq a_n \leq 3$ i da je monotono rastući, pa je po principu monotonije on konvergenta, tj. ima graničnu vrednost. Ta granična vrednost zove se e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Broj e je iracionalan broj. Njegova približna vrednost je $e \approx 2,718281\dots$ i ona se uzima kao osnova prirodnog logaritma.

Važne osobine:

- ▶ Ako niz $\{a_n\}$, $a_n > 0$ konvergira ka broju $a > 0$, tada je i niz $\{\ln a_n\}$ konvergentan i konvergira ka broju $\ln a$.
- ▶ Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka broju a , tada je i niz $\{e^{a_n}\}$ konvergentan i konvergira ka broju e^a .
- ▶ Ako niz $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ konvergira ka broju a , tada je i niz $\{\sqrt[k]{a_n}\}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergentan i konvergira ka broju $\sqrt[k]{a}$.

Izrazi oblika:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, "0 \cdot \infty", "\infty - \infty", "0^0", "\infty^0", "1^{\infty}" \right),$$

zovu se **neodređeni izrazi**.

Primeri izraza koji nisu neodređeni:

$$\frac{2}{\infty} = 0,$$

$$\frac{5}{0^+} = \infty,$$

$$\frac{5}{0^-} = -\infty,$$

$$\frac{0}{\infty} = 0,$$

$$\frac{\infty}{0^+} = \infty,$$

$$0^{\infty} = 0,$$

$$e^{\infty} = \infty,$$

$$e^{-\infty} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\infty} = 0,$$

$$\ln 0^+ = -\infty,$$

$$\ln \infty = \infty,$$

$$\infty + \infty = \infty,$$

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

Važne granične vrednosti kod nizova su:

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases},$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & q \in (-1, 1), \text{ tj. } |q| < 1 \\ \infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{ne postoji,} & q \leq -1 \end{cases},$$

~~$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0,$$~~

~~$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$~~

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

ZADACI

1. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$1.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 4}{5n^5 + 3n^3 - 1} = 0$$

$$1.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + 5n^2 - n + 10}{2n^3 + 3n^2 + 1} = -\frac{3}{2}$$

$$1.3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 - 3n^2 + 10}{5n + 1} = \infty$$

$$1.4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \left(\frac{1}{\cancel{n}} - 1 \right)}{\cancel{n} \left(1 - \frac{1}{\cancel{n}^3} \right)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} = n^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = n^{\frac{2-3}{6}} = n^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$$

$$1.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{n + \sqrt[3]{n}} =$$

$$1.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{2 + 3 \cdot \sqrt[3]{n}} =$$

1.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{(n-1)^3} =$

$$1.8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3 \cdot \sqrt{n}}{2n + 3} =$$

2. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$2.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n+3} - \cancel{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$= \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2^2} = 2$$

$$\sqrt{(-2)^2} = 2$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$2.2 \lim_{n \rightarrow \infty} n(n - \sqrt{n^2 - 1}) \stackrel{\infty (\infty - \infty)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 1}) \cdot \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(\sqrt{n^2})^2 - (\sqrt{n^2 - 1})^2}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2.3 \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1}) \cdot \frac{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2 - n - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{-2}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} + \frac{\sqrt{n^2+1}}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} + \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$$

$$\frac{n^2-1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}$$

3. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$\begin{aligned} 3.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 3^{n+2}}{2^n - 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{3^{n+2}} \left(\frac{2^{n+2}}{\cancel{3^{n+2}}} + 1 \right)}{\cancel{3^n} \left(\frac{2^n}{\cancel{3^n}} - 1 \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^2 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+2} + 1 \right)}{\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1} = \frac{9 \cdot 1}{0 - 1} = -9 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{2}{3} \right| < 1$$

$$3.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} - 5^{n+1}} =$$

$$3.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2} - 3^n}{(-4)^{n+1} - 5^n} =$$

$$3.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + (-2)^n}{3^{n+2} + 5} =$$

4. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$4.1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \stackrel{(1^{\rightarrow})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^{\frac{n}{-2} \cdot \frac{-2}{n}} \cdot A$$

$$= e^{-2}$$

$$4.2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+10} =$$

$$4.3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} =$$

$$4.4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} =$$

$$4.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$4.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n^2} =$$

$$4.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2} =$$

$$4.8 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{2n+1} =$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{3}{n} \right)^{2n+1}}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)^{2n+1}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$4.9 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 7}{3n^2 + 2} \right)^{4n^2} = 1^\infty$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2 + 7}{3n^2 + 2} \right)^{4n^2} = \left(\frac{6}{3} \right)^\infty = 2^\infty = \infty$$

$$4.10 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{\sqrt{n} + 3}\right)^{\sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n+3} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)} \quad \text{4.11} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+2}{n-3} \right)^{n-1} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3} \right)^{n-1}$$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+2}{n-3} - 1 \right)^{n-1}$$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cancel{n+2} - \cancel{n+3}}{n-3} \right)^{n-1}$$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n-3} \right)^{\frac{n-3}{1} \cdot \frac{5}{n-3} \cdot (n-1)}$$

$$= \ln e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n-3)}{n-3}} = \ln e^5 = 5$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\log AB = \log A + \log B$$

$$c \log A = \log A^c$$

$$\ln_e A = B \Leftrightarrow A = e^B$$

$$\ln A = \log_e A$$

$$\ln 5 = 7 \Leftrightarrow 5 = e^7 \quad \perp$$

$$\ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3$$

$$\ln_e e^5 = \square \Leftrightarrow e^5 = e^\square$$

$$\square = 5$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$$

$$\ln A = \ln A^C$$

4.12 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(2n+1) - \ln(2n+2)) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^n$$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+1}{2n+2} - 1 \right)^n$$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+1-2n-2}{2n+2} \right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{2n+2} \right)^{\frac{2n+2}{-1} \cdot n}$$

$$= \ln e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+2}} = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

~~$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(2n+1) - \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln(2n+2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(2n+1)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln (2n+1)^n$$~~