Funkcije - izvodi

June 30, 2025

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalu $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Sa $\Delta x \neq 0$ se označava **priraštaj argumenta** funkcije $f(x)$ u tački $x \in (a, b)$ (Δx je mala promena argumenta).

Ako tačka $x + \triangle x$ pripada intervalu (a, b), onda je realan broj

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

priraštaj funkcije $f(x)$ u tački x, koji odgovara priraštaju argumenta Δx.

Ako postoji (konačna) granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

tada se ta granična vrednost naziva **prvi izvod** funkcije $f(x)$ u tački x i obeležava sa y' ili $f'(x)$.

Ako je ova granična vrednost jednaka ∞ ili $-\infty$ funkcija nema izvod u tački x i kaže se da funkcija ima beskonačan izvod.

Ako se u definiciji prvog izvoda posmatra samo leva, odnosno desna, granična vrednost dobija se levi, odnosno desni, izvod u tački x koji se označava se sa f'_-, odnosno f'_+.

Da bi postojao izvod u nekoj tački moraju postojati i levi i desni izvod i oni moraju biti jednaki.

Napomena: Pod $f'(x)$ se podrazumeva izvod u proizvoljnoj tački domena. Ako je potrebno odrediti izvod u konkretnoj tački x_0 piše se $f'(x_0)$.

Ako funkcija ima izvod u nekoj tački x, ona je u toj tački neprekidna. Obrnuto ne mora da važi.

Za funkciju koja ima izvod u tački x kaže se da je diferencijabilna u tački x.

Zadatak 1. Po definiciji odrediti prvi izvod funkcija:

1. $f(x) = x^2$,

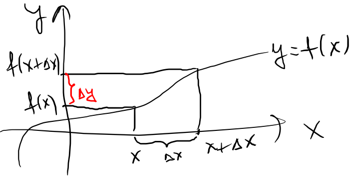
2. $f(x) = 3 - x^2$,

3. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad x \neq 1,$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x-1} - \frac{1}{x-1}}{\Delta x} \overset{0/0}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-1-(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x}-\Delta x+\cancel{1}}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\frac{\Delta x}{1}}\right]$$



$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(x+\Delta x-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

4. $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x > -\frac{1}{3}.$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x)+1} - \sqrt{3x+1}}{\Delta x} \quad \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x)+1} - \sqrt{3x+1}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{3(x+\Delta x)+1} + \sqrt{3x+1}}{\sqrt{3(x+\Delta x)+1} + \sqrt{3x+1}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)+1 - (3x+1)}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)+1} + \sqrt{3x+1}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{3x} + 3\Delta x \cancel{+1} - \cancel{3x} \cancel{-1}}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)+1} + \sqrt{3x+1}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{3(x+\cancel{\Delta x}^{0})+1} + \sqrt{3x+1}\right)} = \frac{3}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

Tablica izvoda elementarnih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$	važi za
c=const	0	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$a \neq 1 \wedge a > 0 \wedge x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a \neq 1 \wedge a > 0 \wedge x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Napomena: U narednim zadacima izvodi funkcija će biti traženi u oblastima gde postoje i to se neće posebno naglašavati.

Osobine izvoda

Neka funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u okolini tačke $x \in \mathbb{R}$ i neka $\alpha \in \mathbb{R}$, tada važi:

1. $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$,
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Zadatak 2. Izračunati prvi izvod funkcija:

1. $y = x^3 - 3x^2 + x^6 - 2,$

2. $y = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{6}{5}$,

3. $y = \dfrac{1}{x^2} - 2 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x},$

4. $y = \sqrt[3]{x} - \dfrac{2}{x^4} + 5\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}} + \dfrac{1}{x}$,

5. $y = -\frac{4}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{7}x^2 + x\sqrt{x} + 4,$

6. $y = 5^x + \sin x - 5^2 + e^x - e^3$,

7. $y = x^3 \ln x,$

8. $y = e^x \sin x,$

9. $y = \dfrac{x}{x+1}$,

10. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$,

11. $y = \dfrac{x^2}{e^x}$,

12. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\ln x}$,

13. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$,

14. $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$,

15. $y = \dfrac{\ln x}{\cos x} + 3\mathrm{tg} x \cdot e^x,$

16. $y = 2x^3 \sin x - e^3 \cdot e^x + 2\dfrac{\ln x}{x^4}.$

Zadatak 3. Za funkciju $f(x) = \frac{x^5}{4} + 2e^x$ odrediti $f'(2)$.

Zadatak 4. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ odrediti $f'(3)$.

Izvod složene funkcije

Neka je funkcija g diferencijabilna u tački $x \in \mathbb{R}$ i neka je funkcija f diferencijabilna u tački $u = g(x)$. Tada je funkcija $f\big(g(x)\big)$ takođe diferencijabilna u tački x i važi

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

Zadatak 5. Izračunati prvi izvod funkcija:

$$(x^{10})' = 10x^9$$

1. $y = (1 - 5x^2)^{10}$,

$$y' = 10(1-5x^2)^9 \cdot (1-5x^2)'$$

$$= 10(1-5x^2)^9 \cdot (-5 \cdot 2x)$$

2. $y = e^{\sin x} + e^{x^3} + e^{e^x} - e^{\mathrm{arctg} x} + e^{e^e},$

3. $y = \cos x^2 + \cos^2 x,$

4. $y = \ln^5 x + \sin^2 x - \cos^3 x,$

5. $y = \ln \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$,

6. $y = \ln \sin x - \ln \ln x + \ln \mathrm{arctg} x + \ln 5 - \ln x^8 + \ln \frac{1}{x}$,

7. $y = \sin 3x + \sin e^x - \sin \ln x + \sin \sin x - \sin \cos x + \sin x^5,$

8. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \operatorname{arctg} x^3 + \operatorname{arctg} \ln x,$

9. $y = e^{x^3} + 3\operatorname{tg}^4 x,$

10. $y = \arcsin e^x - 3e^{\arcsin x}$,

11. $y = \operatorname{arctg} x^3 - \frac{1}{\sqrt{\ln x}} + \sqrt[3]{\sin^5 x}$,

$$(\operatorname{arctg} X)' = \frac{1}{1+X^2}$$

$$X' = 1$$

$$y = \operatorname{arctg} x^3 - (\ln x)^{-\frac{1}{2}} + (\sin x)^{\frac{5}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot (x^3)' - \left(-\frac{1}{2}\right)(\ln x)^{-\frac{1}{2}-1} (\ln x)' + \frac{5}{3}(\sin x)^{\frac{5}{3}-1} \cdot (\sin x)'$$

$$= \frac{1}{1+x^6} 3x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{3}(\sin x)^{\frac{2}{3}} \cdot \cos x$$

$\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$

12. $y = \ln\left(\sin^2(2x+1) + (2x+3)^6\right),$

$$y' = \frac{1}{\sin^2(2x+1)+(2x+3)^6}\left(\left(\sin(2x+1)\right)^2 + (2x+3)^6\right)'$$

$$= \frac{1}{\sin^2(2x+1)+(2x+3)^6}\left(2\sin(2x+1)\cdot\left(\sin(2x+1)\right)' + 6(2x+3)^5\cdot(2x+3)'\right)$$

$$= \frac{1}{\sin^2(2x+1)+(2x+3)^6}\left(2\sin(2x+1)\cdot\cos(2x+1)\cdot(2x+1)' + 6(2x+3)^5\cdot 2\right)$$

$$= \frac{1}{\sin^2(2x+1)+(2x+3)^6}\left(2\sin(2x+1)\cos(2x+1)\cdot 2 + 6(2x+3)^5\cdot 2\right)$$

13. $y = \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$,

$$y' = \frac{1}{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right)'$$

$$= \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cdot \frac{(1+\sin x)'(1-\sin x) - (1+\sin x)\cdot(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1-\sin x) - (1+\sin x)(-\cos x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x(1-\cancel{\sin x}+1+\cancel{\sin x})}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

14. $y = \sin^3 e^{x^2} + e^{\cos^2 \ln x}$,

$$y = \underbrace{\left(\sin e^{x^2}\right)^3} + \underbrace{e^{(\cos \ln x)^2}}$$

$$y' = 3\left(\sin e^{x^2}\right)^2 \cos e^{x^2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x + e^{(\cos \ln x)^2} \cdot 2 \cos \ln x \left(-\sin \ln x\right) \frac{1}{x}$$

$$y' = 3\left(\sin e^{x^2}\right)^2 \cdot \left(\sin e^{x^2}\right)' = 3\left(\sin e^{x^2}\right)^2 \cdot \cos e^{x^2} \cdot \left(e^{x^2}\right)'$$

$$= 3\left(\sin e^{x^2}\right)^2 \cos e^{x^2} \, e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)'$$

15. $y = \operatorname{arctg}^3 \ln x + \ln^4 \cos x$,

$$y = (\operatorname{arctg} \ln x)^3 + (\ln \cos x)^4$$

$$y' = 3(\operatorname{arctg} \ln x)^2 \frac{1}{1+(\ln x)^2} \frac{1}{x} + 4(\ln \cos x)^3 \frac{1}{\cos x}(-\sin x)$$

16. $y = \ln \sqrt{\sin^2 \frac{x+1}{x+5}}$

Zadatak 6. Odrediti $f'(0)$ za funkciju $f(x) = e^{x^3+2x+1}$.

Zadatak 7. Odrediti $f'(e)$ za funkciju $f(x) = \ln^2 x + \sqrt{\ln x}$.

Izvodi višeg reda

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna i neka je $f'(x)$ njen prvi izvod. Ako je funkcija $f'(x)$ diferencijabilna, onda se njen izvod naziva **izvod drugog reda** ili **drugi izvod** funkcije f u tački x i označava sa $y'' = f''(x) = (f'(x))'$.

Ako postoji, n-**ti izvod funkcije** $f(x)$, u oznaci $f^{(n)}(x)$, je prvi izvod funkcije $f^{(n-1)}(x)$, tj.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \; n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 4. Izračunati drugi izvod funkcija:

1. $y = e^{2x} - x^4 + \sin 5x - \ln 4x,$

2. $y = (x - 2)\, e^{2x}$,

3. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$,

4. $y = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$,

5. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}.$

Zadatak 5. Za funkciju $f(x) = x^3 - e^{2x+\ln x}$, odrediti $f''(1)$.

Izvod parametarski zadatih funkcija

Parametarski zadata funkcija je ona funkcija $y = y(x)$ koja je definisana preko funkcija:

$$x = x(t) \quad \text{i} \quad y = y(t) \quad \text{za} \quad t \in I,$$

gde je t neki parametar, a $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval realnih brojeva.

Oznake za prvi izvod funkcije po parametru t su $\dot{x} = x'_t$ i $\dot{y} = y'_t$, a za drugi izvod su $\ddot{x} = x''_t$ i $\ddot{y} = y''_t$.

Ako funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$ imaju prve izvode po t i ako je $x'_t \neq 0$, onda je **prvi izvod parametarski zadate funkcije**

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ parametarski zadata funkcija } \begin{cases} x = x(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} \end{cases} .$$

Ako funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$ imaju druge izvode po t i ako je $x'_t \neq 0$, onda je **drugi izvod parametarski zadate funkcije**

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ parametarski zadata funkcija } \begin{cases} x = x(t) \\ y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} \end{cases} .$$

$y = f(x)$

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases}$$

*

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 3 \\ y = 5t + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 3 \\ y'_x = \dfrac{5}{4t+3} \end{cases}$$

$x = 2t^2 + 3 \Rightarrow x'_t = 2 \cdot 2t = 4t$

$y = 5t + 7 \Rightarrow y'_t = 5$

$$\left\{ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{5}{4t} \right.$$

Zadatak 6. Izračunati prvi izvod parametarski zadatih funkcija:

1. $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t^2 - 3t + 5 \end{cases}$,

$$\left.\begin{array}{l} x'_t = 2 \\ y'_t = 2t - 3 \end{array}\right\} y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-3}{2}$$

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y'_x = \dfrac{2t-3}{2} \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$, $\Rightarrow x'_t = \dfrac{1}{t}$, $\Rightarrow y'_t = 1 - \dfrac{1}{t^2}$ $\Bigg\}$ $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{1 - \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}}$

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y'_x = \dfrac{1 - \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

3. $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$,

4. $$\begin{cases} x = \sqrt[3]{t^4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{t^4}} \\ y = t^4 + \dfrac{1}{t^4} \end{cases},$$

5. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$.

6. $\begin{cases} x = \sin^2 \ln t = (\sin \ln t)^2 \\ y = \cos^3 \ln t = (\cos \ln t)^3 \end{cases}$

$$x'_t = 2 \sin \ln t \cdot \cos \ln t \, \frac{1}{t}$$

$$y'_t = 3(\cos \ln t)^2 \cdot (-\sin \ln t) \cdot \frac{1}{t}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-3(\cos \ln t)^{\cancel{2}} \cancel{\sin \ln t} \cdot \cancel{\frac{1}{t}}}{2 \cdot \cancel{\sin \ln t} \cdot \cancel{\cos \ln t} \cdot \cancel{\frac{1}{t}}}$$

$$\begin{cases} x = \sin^2 \ln t \\ y'_x = \dfrac{-3 \cos \ln t}{2} \end{cases}$$

7. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$,

8. $\begin{cases} x = \sin t + t^2 \\ y = \ln t - \operatorname{tg} t \end{cases},$

9. $$\begin{cases} x = t^2 \cos t - e^{2t} \\ y = \ln \dfrac{t+1}{t^2-1} \end{cases}.$$

Implicitno zadate funkcije

Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata implicitno, jednačinom $F(x, y) = 0$ ili $F(x, y) = G(x, y)$.

Njen izvod se računa tako što se prvo odredi izvod leve i desne strane jednakosti po promenljivoj x, pri čemu se vodi računa da je x nezavisna promenljiva, a $y = f(x)$ funkcija koja zavisi od x.

Na taj način se i izvod funkcije $y = f(x)$ dobija u implicitnom obliku.

U nekim slučajevima on se može prebaciti u eksplicitni oblik, ali to nije neophodno.

Drugi izvod implicitno zadate funkcije se računa na isti način kao i prvi izvod.

$x' = 1$

$(y)' = y'$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Zadatak 8. Izračunati prvi izvod implicitno zadatih funkcija:

$y = f(x)$

$y = \sin x$

$y^2 + x^2 = 5$

$y = \pm\sqrt{5 - x^2}$

1. $\underbrace{x^2y^3} + x^3 - y = 0,$

$2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' + 3x^2 - y' = 0$

$y'(3x^2y^2 - 1) = -3x^2 - 2xy^3$

$y' = \dfrac{-3x^2 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 1}$

2. $xe^y + y\sin x = x^3$,

$$e^y + \underbrace{x e^y \cdot y'} + \underbrace{y' \sin x} + y \cdot \cos x = 3x^2$$

$$y'(xe^y + \sin x) = 3x^2 - e^y - y\cos x$$

$$y' = \frac{3x^2 - e^y - y\cos x}{xe^y + \sin x}$$

3. $x^3 \cdot e^{\sin y} + e^{x^2 y^3} = y^4 - x^4$,

$$3x^2 \cdot e^{\sin y} + x^3\, e^{\sin y} \cdot \cos y \cdot y' + e^{x^2 y^3} \cdot \left(2 x y^3 + x^2 \cdot 3 y^2 \cdot y'\right) =$$

$$= 4y^3 \cdot y' - 4x^3$$

4. $x = \ln^3 y - \operatorname{arctg} y^4.$

$x = (\ln y)^3 - \operatorname{arctg} y^4$

Logaritamski izvod

Logaritamski izvod se koristi za određivanje izvoda funkcija oblika $y = f(x)^{g(x)}$ kod kojih je $f(x) > 0$.

Ovaj postupak podrazumeva da se obe strane jednakosti $y = f(x)^{g(x)}$ logaritmuju. Nakon toga se dobija funkcija u implicitnom obliku čiji izvod se računa po pravilu za nalaženje izvoda implicitne funkcije, tj.

ln

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$(x^{x})' \neq x \cdot x^{x-1}$$

$$\begin{aligned}
y &= f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0 \\
\ln y &= \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) \\
\ln y &= g(x) \cdot \ln(f(x)) \\
\frac{1}{y} y' &= g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x) \\
y' &= f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right].
\end{aligned}$$

Drugi izvod ovih funkcija se određuje na isti način.

Zadatak 9. Izračunati prvi izvod funkcija:

$c \ln A = \ln A^c$

1. $y = x^{x^2}$, $x > 0$,

$$y = x^{x^2} \quad / \ln$$

$$\ln y = \ln x^{x^2}$$

$$\ln y = x^2 \cdot \ln x \quad /'$$

$$\frac{1}{y} y' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}$$

$$y' = y\,(2x \ln x + x)$$

$$y' = x^{x^2}(2x \ln x + x)$$

2. $y = x^{\sin x}, \; x > 0,$

3. $y = x^{\operatorname{tg} x},\ x > 0,$

4. $y = (\cos x)^x, \; x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z},$

5. $y = (\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x}, \quad x \in (0,1).$

$$y = (\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x} \quad / \ln$$

$$\ln y = \ln (\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x}$$

$$\ln y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln(\arcsin x) \quad /'$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(\arcsin x) + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \underbrace{(\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x}}_{y} \left(\frac{\ln(\arcsin x)}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$\cancel{x} \quad \overset{y}{f(x)} = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$

a) $f'(x)$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$

a) $f(x) = (\sin x)^{\frac{1}{x}} \quad / \ln$

$\ln f(x) = \ln (\sin x)^{\frac{1}{x}}$

$\ln \overset{y}{f(x)} = \frac{1}{x} \cdot \ln(\sin x) \quad /'$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(\sin x) + \frac{1}{x} \frac{1}{\sin x} \cos x$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(-\frac{\ln(\sin x)}{x^2} + \frac{\cos x}{x \sin x} \right)$$

$$f'(x) = (\sin x)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{\ln(\sin x)}{x^2} + \frac{1}{x} \operatorname{ctg} x \right)$$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}}}$

$= 1$

Geometrijska interpretacija prvog izvoda

Neka je dat grafik neprekidne funkcije $y = f(x)$ nad intervalom (a, b) i na njemu proizvoljne tačke $M(x, y)$ i $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Sečica koja prolazi kroz tačke M i N zaklapa ugao β sa pozitivnim smerom x-ose i važi:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Kad $\Delta x \longrightarrow 0$, tačka N se približava tački M, a sečica MN postaje tangenta krive postavljena u tački M.
Ako se ugao između ove tangente i pozitivnog smera x-ose označi sa α, onda je

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \mathrm{tg}\beta = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Dakle, prvi izvod funkcije u nekoj tački predstavlja koeficijent pravca tangente u posmatranoj tački.

Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x_0, tj. neka postoji $f'(x_0)$.

Jednačina tangente t na grafik funkcije $y = f(x)$ u tački $A(x_0, f(x_0))$ je

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ako je $f'(x_0) = 0$, onda je tangenta horizontalna prava $y = f(x_0)$.

Jednačina normale n na grafik funkcije $f(x)$ u tački $A(x_0, f(x_0))$ je

$$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

ako je $f'(x_0) \neq 0$. U slučaju da je $f'(x_0) = 0$ jednačina normale je vertikalna prava $x = x_0$.

Zadatak 10. Odrediti jednačine tangente i normale na krive (grafike funkcija):

1. $y = x^2 + 2x$ u tački date krive čija je apscisa $x = 1$,

$$t: \; y - \overset{3}{y_0} = \overset{4}{f'(x_0)}(x - \overset{1}{x_0})$$

$$n: \; y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$f(x) = y = x^2 + 2x$

$x_0 = 1$

$A(1, 3)$

$y_0 = f(x_0) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

2. $y = e^{x^2-1}$ u tački date krive čija je apscisa $x = 1$,

3. $y = \mathrm{arctg} x^2$ u tački date krive čija je apscisa $x = 0$,