

# Brojni niz

June 20, 2025

**Realan brojni niz** je svako preslikavanje  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Niz se označava sa  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ili samo  $\{a_n\}$  gde je  $f(n) = a_n$  i kaže se da je  $a_n$  opšti član niza  $\{a_n\}$ .

*Primer 1.* Članovi niza čiji je opšti član:

$$a_n = n^2 \quad \text{su} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 16, \quad \dots$$

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \text{su} \quad b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \quad b_4 = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

$$c_n = 2 \quad \text{su} \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = 2, \quad \dots$$

$$d_n = (-1)^n \quad \text{su} \quad d_1 = -1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = -1, \quad d_4 = 1, \quad \dots$$

Niz kod kog svi članovi imaju istu vrednost (kao  $c_n$  u prethodnom primeru) naziva se **stacionarni niz**.

Ako postoji realan broj  $G$  takav da je  $a_n \leq G, \forall n \in \mathbb{N}$  kažemo da je niz  $\{a_n\}$  **ograničen sa gornje strane** brojem  $G$  i broj  $G$  se tada naziva **gornje ograničenje niza**.

Ako postoji realan broj  $g$  takav da je  $g \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$  kažemo da je niz  $\{a_n\}$  **ograničen sa donje strane** brojem  $g$  i broj  $g$  se tada naziva **donje ograničenje niza**.

Ako postoji i gornje i donje ograničenje niza, kaže se da je niz ograničen.

Očigledno, gornje i donje ograničenje niza nije jedinstveno.

Najmanje gornje ograničenje niza naziva se **supremum** i označava se  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ , a najveće donje ograničenje niza naziva se **infimum** i označava se  $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ .

## Primer 2.

- ▶ Niz  $\{a_n\}$ ,  $a_n = n^2$  je ograničen sa donje strane. Brojevi  $0, -2, \frac{1}{2}, 1, \dots$  predstavljaju njegova donja ograničenja, a  $\inf a_n = 1$  jer je  $n^2 \geq 1$  za svako  $n \in \mathbb{N}$ . Ovaj niz nije ograničen sa gornje strane.
- ▶ Niz  $\{b_n\}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$  je ograničen (i sa gornje i sa donje strane), a pošto je  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , to je  $\sup b_n = 1$ , a  $\inf b_n = 0$ .
- ▶ Niz  $\{c_n\}$ ,  $c_n = 2$  je takođe ograničen i važi  $\sup c_n = \inf c_n = 2$ .
- ▶ Niz  $\{d_n\}$ ,  $d_n = (-1)^n$  je ograničen jer  $-1 \leq (-1)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , pa je  $\sup d_n = 1$ , a  $\inf d_n = -1$ .

Za proizvoljan realan broj  $a$ , otvoren interval  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , gde je  $\varepsilon > 0$ , naziva se  **$\varepsilon$ -okolina** tačke  $a$ .

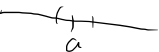
Realan broj  $a$  je **tačka nagomilavanja niza**  $\{a_n\}$  akko se u svakoj  $\varepsilon$ -okolini broja  $a$  nalazi beskonačno mnogo članova tog niza.

*Primer 3.*

- ▶ Za niz  $\{b_n\}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$  tačka nagomilavanja je broj 0 jer se u proizvoljnoj  $\varepsilon$ -okolini tačke 0, tj. u intervalu  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  nalazi beskonačno mnogo članova niza  $b_n$ .

- ▶ Za niz  $\{c_n\}$ ,  $c_n = 2$  tačka nagomilavanja je broj 2 jer se svi članovi niza  $c_n$  nalaze u bilo kojoj okolini tačke 2.
  
- ▶ Za niz  $\{a_n\}$ ,  $a_n = n^2$  ne postoji tačka nagomilavanja jer se njegovi članovi neograničeno povećavaju.
  
- ▶ Za niz  $\{d_n\}$ ,  $d_n = (-1)^n$  tačke nagomilavanja su brojevi  $\pm 1$  jer se u proizvoljnoj  $\varepsilon$ -okolini oba broja nalazi beskonačno mnogo članova niza  $d_n$ .

Realan broj  $a$  je **granična vrednost niza**  $\{a_n\}$  akko se izvan proizvoljne  $\varepsilon$ -okoline broja  $a$  nalazi najviše konačno mnogo članova niza  $\{a_n\}$ , tj.



$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ovo znači da se za svako  $\varepsilon > 0$  može pronaći prirodan broj  $n_0$ , koji zavisi od  $\varepsilon$ , takav da se svi članovi niza  $\{a_n\}$  čiji je indeks veći od  $n_0$  nalaze u  $\varepsilon$ -okolini tačke  $a$ .

Ovaj iskaz se označava sa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ ili } a_n \rightarrow a \text{ kad } n \rightarrow \infty \text{ (} a_n \text{ teži u } a \text{ kad } n \text{ teži u } \infty \text{)}.$$

Ako niz  $\{a_n\}$  ima graničnu vrednost  $a \in \mathbb{R}$  kaže se da je **konvergentan**, tj. da konvergira ili teži ka tački  $a$ . Ako niz nije konvergentan, on je **divergentan** tj. divergira.

Očigledno je granična vrednost niza ujedno i tačka nagomilavanja tog niza, kao i da niz sa više tačaka nagomilavanja nije konvergentan.

Niz  $\{a_n\}$  teži u  $\infty$ , kad  $n$  teži u  $\infty$ , tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  akko

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Niz  $\{a_n\}$  teži u  $-\infty$ , kad  $n$  teži u  $\infty$ , tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  akko

$$(\forall M < 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

Za niz  $\{a_n\}$  koji teži ka  $\infty$  ili  $-\infty$  kaže se da je divergentan u užem smislu. Dok se za niz koji je divergentan, ali ne u užem smislu kaže da je divergentan u širem smislu.

#### Primer 4.

Niz  $\{a_n\}$ ,  $a_n = n^2$  nije konvergentan jer nema tačku nagomilavanja.

Niz  $\{d_n\}$ ,  $d_n = (-1)^n$  nije konvergentan jer ima dve tačke nagomilavanja.

Niz  $\{c_n\}$ ,  $c_n = 2$  je konvergentan i važi  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$ , jer se u svakoj  $\varepsilon$ -okolini tačke 2 nalaze svi članovi ovog niza.

Niz  $\{b_n\}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$  je takođe konvergentan i važi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  jer je

$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ , što znači da se unutar proizvoljne  $\varepsilon$

-okoline tačke 0 nalaze svi članovi niza čiji je indeks veći od  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

## Osnovne osobine konvergentnih nizova:

- ▶ Ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , tada je  $a$  jedina tačka nagomilavanja niza  $\{a_n\}$ .
- ▶ Konvergentan niz  $\{a_n\}$  ima jedinstvenu graničnu vrednost i ta granična vrednost je jednaka tački nagomilavanja tog niza.
- ▶ Konvergentan niz je ograničen.
- ▶ Ako je niz  $\{a_n\}$  ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, tada je on konvergentan i njegova granična vrednost je tačka nagomilavanja.

- ▶ Ako su nizovi  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  takvi da je  $a_n \leq b_n$ , za svako  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$  i ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , tada je  $a \leq b$ .
- ▶ Ako su nizovi  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  i  $\{c_n\}$  takvi da je  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , za svako  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$  i ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$  onda je i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .
- ▶ Ako je niz  $\{a_n\}$  ograničen i niz  $\{b_n\}$  takav da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , tada je  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$ .

## Računske operacije sa graničnim vrednostima:

Ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  i  $c$  konstanta,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , tada je:

▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ca$ ;

▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$  ;

▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$ ;

▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$ , gde je  $b_n \neq 0$  i  $b \neq 0$ .

Niz  $\{a_n\}$  je monotono:

- ▶ **rastući** ako je  $a_n < a_{n+1}$ , za svako  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶ **opadajući** ako je  $a_n > a_{n+1}$ , za svako  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶ **nerastući** ako je  $a_n \geq a_{n+1}$ , za svako  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶ **neopadajući** ako je  $a_n \leq a_{n+1}$ , za svako  $n \in \mathbb{N}$ .

Niz  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je monoton ako ima bilo koju od ovih osobina.

Princip monotonije: svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Teorema: Niz  $\{a_n\}$  čiji je opšti član  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  je konvergentan.

Ideja dokaza: Može se pokazati da je ovaj niz ograničen, tj. da je  $2 \leq a_n \leq 3$  i da je monotono rastući, pa je po principu monotonije on konvergenta, tj. ima graničnu vrednost. Ta granična vrednost zove se  $e$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Broj  $e$  je iracionalan broj. Njegova približna vrednost je  $e \approx 2,718281\dots$  i ona se uzima kao osnova prirodnog logaritma.

Važne osobine:

- ▶ Ako niz  $\{a_n\}$ ,  $a_n > 0$  konvergira ka broju  $a > 0$ , tada je i niz  $\{\ln a_n\}$  konvergentan i konvergira ka broju  $\ln a$ .
- ▶ Ako niz  $\{a_n\}$  konvergira ka broju  $a$ , tada je i niz  $\{e^{a_n}\}$  konvergentan i konvergira ka broju  $e^a$ .
- ▶ Ako niz  $\{a_n\}$ ,  $a_n \geq 0$  konvergira ka broju  $a$ , tada je i niz  $\{\sqrt[k]{a_n}\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , konvergentan i konvergira ka broju  $\sqrt[k]{a}$ .

Izrazi oblika:

$$" \frac{\infty}{\infty} ", " \frac{0}{0} ", " 0 \cdot \infty ", " \infty - \infty ", " 0^0 ", " \infty^0 ", " 1^{\infty} ",$$

zovu se **neodređeni izrazi**.

Primeri izraza koji nisu neodređeni:

$$" \frac{2}{\infty} = 0 ",$$

$$" \frac{5}{0^+} = \infty ",$$

$$" \frac{5}{0^-} = -\infty ",$$

$$" \frac{0}{\infty} = 0 ",$$

$$" \frac{\infty}{0^+} = \infty ",$$

$$" 0^{\infty} = 0 ",$$

$$" e^{\infty} = \infty ",$$

$$" e^{-\infty} = 0 ",$$

$$" \left( \frac{1}{5} \right)^{\infty} = 0 ",$$

$$" \ln 0^+ = -\infty ",$$

$$" \ln \infty = \infty ",$$

$$" \infty + \infty = \infty ",$$

$$" \infty \cdot \infty = \infty ".$$

Važne granične vrednosti kod nizova su:

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases},$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & q \in (-1, 1), \text{ tj. } |q| < 1 \\ \infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{ne postoji,} & q \leq -1 \end{cases},$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0,$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

# ZADACI

1. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$1.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 4}{5n^5 + 3n^3 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left( \frac{3}{n^3} - \frac{2}{n^4} + \frac{4}{n^5} \right)}{n^5 \left( 5 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^5} \right)} = \frac{0}{5} = 0$$

$= 0$

$$1.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + 5n^2 - n + 10}{2n^3 + 3n^2 + 1} = -\frac{3}{2}$$

$$1.3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 - 3n^2 + 10}{5n + 1} = \infty$$

$$1.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}} =$$

$$1.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{n + \sqrt[3]{n}} =$$

$$1.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{2 + 3 \cdot \sqrt[3]{n}} =$$

$$1.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{(n + 1)^3} =$$

$$1.8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3 \cdot \sqrt{n}}{2n + 3} =$$

2. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$2.1 \lim_{\underline{n \rightarrow \infty}} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) =$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$= \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2^2} = 2$$

$$\sqrt{(-2)^2} = 2$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$2.2 \lim_{n \rightarrow \infty} n(n - \sqrt{n^2 - 1}) \stackrel{\infty (\infty - \infty)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 1}) \cdot \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(\sqrt{n^2})^2 - (\sqrt{n^2 - 1})^2}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2.3 \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1}) \cdot \frac{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2 - n - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{-2}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} + \frac{\sqrt{n^2+1}}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} + \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$$

$$\frac{n^2-1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}$$

3. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$3.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 3^{n+2}}{2^n - 3^n} =$$

$$3.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} - 5^{n+1}} =$$

$$3.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2} - 3^n}{(-4)^{n+1} - 5^n} =$$

$$3.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + (-2)^n}{3^{n+2} + 5} =$$

4. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$4.1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \stackrel{(1^{\circ})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^{\frac{n}{-2} \cdot \frac{-2}{n}} \cdot A$$

$$= e^{-2}$$

$$4.2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+10} =$$

$$4.3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} =$$

$$4.4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} =$$

$$4.5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$4.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n+1} \right)^{n^2} =$$

$$4.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2} =$$

$$4.8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^{2n}}{(2n+1)^{2n}} =$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 + \frac{3}{n})}{n(2 + \frac{1}{n})} = \frac{2}{2} = 1$$

$$4.9 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 7}{3n^2 + 2} \right)^{4n^2} = 1^\infty$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n^2 + 7}{3n^2 + 2} \right)^{4n^2} = \left( \frac{6}{3} \right)^\infty = 2^\infty = \infty$$

$$4.10 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{\sqrt{n} + 3}\right)^{\sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n+3} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)} \quad \text{4.11} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{n+2}{n-3} \right)^{n-1} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-3} \right)^{n-1}$$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{n+2}{n-3} - 1 \right)^{n-1}$$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\cancel{n+2} - \cancel{n+3}}{n-3} \right)^{n-1}$$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{n-3} \right)^{\frac{n-3}{1} \cdot \frac{5}{n-3} \cdot (n-1)}$$

$$= \ln e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n-3)}{n-3}} = \ln e^5 = 5$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\log AB = \log A + \log B$$

$$c \log A = \log A^c$$

$$\ln_e A = B \Leftrightarrow A = e^B$$

$$\ln A = \log_e A$$

$$\ln 5 = 7 \Leftrightarrow 5 = e^7 \quad \perp$$

$$\ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3$$

$$\ln_e e^5 = \square \Leftrightarrow e^5 = e^\square$$

$$\square = 5$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$   
 $\ln A = \ln A^C$

4.12  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(2n+1) - \ln(2n+2)) =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{2n+1}{2n+2}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^n$

~~$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(2n+1) - \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln(2n+2)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(2n+1)^n$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln (2n+1)^n$~~

$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2n+1}{2n+2} - 1 \right)^n$   
 $= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2n+1-2n-2}{2n+2} \right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-1}{2n+2} \right)^n$   
 $= \ln e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+2}} = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$