

BROJNI NIZ

Realan brojni niz ili kraće samo niz je svako preslikavanje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Niz se označava sa $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ili samo $\{a_n\}$ gde je $f(n) = a_n$ i kaže se da je a_n opšti član niza $\{a_n\}$.

Primer 1. Članovi niza čiji je opšti član:

$$a_n = n^2 \quad \text{su} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 16, \quad \dots$$

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \text{su} \quad b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \quad b_4 = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

$$c_n = 2 \quad \text{su} \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = 2, \quad \dots$$

$$d_n = (-1)^n \quad \text{su} \quad d_1 = -1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = -1, \quad d_4 = 1, \quad \dots$$

Niz kod kog svi članovi imaju istu vrednost (kao c_n u prethodnom primeru) naziva se **stacionarni niz**.

Ako postoji realan broj G takav da je $a_n \leq G, \forall n \in \mathbb{N}$ kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa gornje strane** brojem G i broj G se tada naziva **gornje ograničenje niza**.

Ako postoji realan broj g takav da je $g \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa donje strane** brojem g i broj g se tada naziva **donje ograničenje niza**.

Ako postoji i gornje i donje ograničenje niza, kaže se da je niz ograničen.

Očigledno, gornje i donje ograničenje niza nije jedinstveno.

Najmanje gornje ograničenje niza naziva se **supremum** i označava sa $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, a najveće donje ograničenje niza naziva se **infimum** i označava se $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Primer 2. Niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ je ograničen sa donje strane. Brojevi $0, -2, \frac{1}{2}, 1, \dots$ predstavljaju njegova donja ograničenja, a $\inf a_n = 1$ jer je $n^2 \geq 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz nije ograničen sa gornje strane.

Niz $\{b_n\}$, $b_n = \frac{1}{n}$ je ograničen (i sa gornje i sa donje strane), a pošto je $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, to je $\sup b_n = 1$, a $\inf b_n = 0$.

Niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ je takođe ograničen i važi $\sup c_n = \inf c_n = 2$.

Niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ je ograničen jer $-1 \leq (-1)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, pa je $\sup d_n = 1$, a $\inf d_n = -1$.

Za proizvoljan realan broj a , otvoren interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, gde je $\varepsilon > 0$, naziva se **ε -okolina** tačke a .

Realan broj a je **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ akko se u svakoj ε -okolini broja a nalazi beskonačno mnogo članova tog niza.

Primer 3. Za niz $\{b_n\}$, $b_n = \frac{1}{n}$ tačka nagomilavanja je broj 0 jer se u proizvoljnoj ε -okolini tačke 0, tj. u intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza b_n .

Za niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ tačka nagomilavanja je broj 2 jer se svi članovi niza c_n nalaze u bilo kojoj okolini tačke 2.

Za niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ ne postoji tačka nagomilavanja jer se njegovi članovi neograničeno povećavaju.

Za niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ tačke nagomilavanja su brojevi ± 1 jer se u proizvoljnoj ε -okolini oba broja nalazi beskonačno mnogo članova niza d_n .

Realan broj a je **granična vrednost niza** $\{a_n\}$ akko se izvan proizvoljne ε -okoline broja a nalazi najviše konačno mnogo članova niza $\{a_n\}$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ovo znači da se za svako $\varepsilon > 0$ može pronaći prirodan broj n_0 , koji zavisi od ε , takav da se svi članovi niza $\{a_n\}$ čiji je indeks veći od n_0 nalaze u ε -okolini tačke a .

Ovaj iskaz se označava sa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ili $a_n \rightarrow a$ kad $n \rightarrow \infty$ (a_n teži u a kad n teži u ∞).

Ako niz $\{a_n\}$ ima graničnu vrednost $a \in \mathbb{R}$ kaže se da je **konvergentan**, tj. da konvergira ili teži ka tački a . Ako niz nije konvergentan, on je **divergentan** tj. divergira.

Očigledno je da je granična vrednost niza ujedno i tačka nagomilavanja tog niza, kao i da niz sa više tačaka nagomilavanja nije konvergentan.

Niz $\{a_n\}$ teži u ∞ , kad n teži u ∞ , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ akko

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Niz $\{a_n\}$ teži u $-\infty$, kad n teži u ∞ , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ akko

$$(\forall M < 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

Za niz $\{a_n\}$ koji teži ka ∞ ili $-\infty$ kaže se da je divergentan u užem smislu. Dok se za niz koji je divergentan, ali ne u užem smislu kaže da je divergentan u širem smislu.

Primer 4. Niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ nije konvergentan jer nema tačku nagomilavanja.

Niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ nije konvergentan jer ima dve tačke nagomilavanja.

Niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ je konvergentan i važi $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$, jer se u svakoj ε -okolini tačke 2 nalaze svi članovi ovog niza.

Niz $\{b_n\}$, $b_n = \frac{1}{n}$ je takođe konvergentan i važi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ jer je $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$, što znači da se unutar proizvoljne ε -okoline tačke 0 nalaze svi članovi niza čiji je indeks veći od $\frac{1}{\varepsilon}$.

Osnovne osobine konvergentnih nizova:

- Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, tada je a jedina tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$.
- Konvergentan niz $\{a_n\}$ ima jedinstvenu graničnu vrednost i ta granična vrednost je jednaka tački nagomilavanja tog niza.
- Konvergentan niz je ograničen.
- Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, tada je on konvergentan i njegova granična vrednost je tačka nagomilavanja.
- Ako su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n$, za svako $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ i i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, tada je $a \leq b$.
- Ako su nizovi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$, za svako $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ onda je i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.
- Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i niz $\{b_n\}$ takav da je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Računske operacije sa graničnim vrednostima:

Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i c konstanta, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tada je:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ca$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$, gde je $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$;

Niz $\{a_n\}$ je monotono:

- **nerastući** ako je $a_n \geq a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- **neopadajući** ako je $a_n \leq a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- **rastući** ako je $a_n < a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- **opadajući** ako je $a_n > a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je monoton ako ima bilo koju od ovih osobina.

Princip monotonije: svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Teorema: Niz $\{a_n\}$ čiji je opšti član $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je konvergentan.

Ideja dokaza: Može se pokazati da je ovaj niz ograničen, tj. da je $2 \leq a_n \leq 3$ i da je monotonno rastući, pa je po principu monotonije on konvergentan, tj. ima graničnu vrednost. Ta granična vrednost zove se e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Broj e je iracionalan broj. Njegova približna vrednost je $e \approx 2,718281 \dots$ i ona se uzima kao osnova prirodnog logaritma.

Važne osobine:

- Ako niz $\{a_n\}$, $a_n > 0$ konvergira ka broju $a > 0$, tada je i niz $\{\ln a_n\}$ konvergentan i konvergira ka broju $\ln a$.
- Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka broju a , tada je i niz $\{e^{a_n}\}$ konvergentan i konvergira ka broju e^a .
- Ako niz $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ konvergira ka broju a , tada je i niz $\{\sqrt[k]{a_n}\}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergentan i konvergira ka broju $\sqrt[k]{a}$.

Izrazi oblika:

$$"\frac{\infty}{\infty}", "\frac{0}{0}", "0 \cdot \infty", "\infty - \infty", "0^0", "\infty^0", "1^\infty",$$

zovu se **neodređeni izrazi**.

Primeri izraza koji nisu neodređeni:

$$\begin{aligned} & "\frac{2}{\infty} = 0", & "\frac{5}{0^+} = \infty", & "\frac{5}{0^-} = -\infty", & "\frac{0}{\infty} = 0", & "\frac{\infty}{0^+} = \infty", \\ & "0^\infty = 0", & "e^\infty = \infty", & "e^{-\infty} = 0", & "\left(\frac{1}{5}\right)^\infty = 0", \\ & "\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty", & "\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty", & ", \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}", & ", \operatorname{arctg} (-\infty) = -\frac{\pi}{2}", \\ & "\ln 0^+ = -\infty", & "\ln \infty = \infty", & "\infty + \infty = \infty", & "\infty \cdot \infty = \infty". \end{aligned}$$

Važne granične vrednosti kod nizova su:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & q \in (-1, 1), \text{ tj. } |q| < 1 \\ \infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{ne postoji,} & q \leq -1 \end{cases}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Zadaci:

(1) Za sledeće nizove ispitati ograničenost, tačke nagomilavanja, monotonost i konvergenciju:

- $a_n = 1^n$,
- $b_n = 3^n$,
- $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(2) Izračunati sledeće granične vrednosti, ako postoje:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^n + (-2)^n)$,

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3} \right)^n \right),$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{n} \right).$$

(3) Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 4}{5n^5 + 3n^3 - 1},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + 5n^2 - n + 10}{2n^3 + 3n^2 + 1},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 - 3n^2 + 10}{-5n + 1},$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}},$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{n + \sqrt[3]{n}},$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{n}}{2 + 3 \cdot \sqrt[3]{n}},$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{(n + 1)^3},$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3 \cdot \sqrt{n}}{2n + 3},$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)^2}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

(4) Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 3} - \sqrt{n}),$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} n(n - \sqrt{n^2 - 1}),$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 1}).$$

(5) Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 3^{n+2}}{2^n - 3^n},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{3^{n+1} - 5^{n+1}},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2} - 3^n}{(-4)^{n+1} - 5^n},$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + (-2)^n}{3^{n+2} + 5}.$$

(6) Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+10},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2},$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2},$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n,$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n^2},$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2},$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{2n},$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+7}{3n^2+2} \right)^{4n^2},$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n}}.$$