

FUNKCIJE - NEPREKIDNOST

Funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je **neprekidna u tački** $x_0 \in X$ akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je **neprekidna u tački** $x_0 \in X$ **sa desne (tj. leve)** strane ako je neprekidna za sve x iz skupa $X \cap (x_0, \infty)$ (tj. $X \cap (-\infty, x_0)$).

Razlike između definicija granične vrednosti i neprekidnosti u tački $x_0 \in X$ su:

- za graničnu vrednost u tački x_0 pretpostavka je da je x_0 tačka nagomilavanja za X , a kod neprekidnosti da je funkcija f definisana u tački x_0 , tj. da $x_0 \in X$;
- kod neprekidnosti se zahteva da za svako $x \in X$ važi $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, a kod granične vrednosti da za svako $x \in X \setminus \{x_0\}$ važi $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Oдавде se može zaključiti sledeće:

- ako je f neprekidna funkcija u tački x_0 ne mora da postoji $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, jer ako je x_0 izolovana tačka za skup X , tada je f automatski neprekidna u tački x_0 , dok u tom slučaju ne postoji granična vrednost $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- ako postoji $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ bez obzira da li je funkcija f definisana u tački x_0 , funkcija ne mora da bude neprekidna u tački x_0 (na primer za $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, a $f(x)$ nije neprekidna u 0 jer nije definisana u 0).

Dakle, da bi funkcija bila neprekidna u tački x_0 treba da važi:

- $x_0 \in X$, tj. funkcija je definisana u tački x_0 ;
- ako je x_0 tačka nagomilavanja za X , tada postoji $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ i važi jednakost $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;
- ako je $x_0 \in X$ izolovana tačka, tada je f neprekidna u tački x_0 (ali nema graničnu vrednost u toj tački).

Ako je tačka x_0 tačka nagomilavanja skupa X i ako je funkcija f definisana u njoj, tada je f neprekidna u tački x_0 akko

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ako funkcija f nije neprekidna u tački x_0 , kaže se da je funkcija f prekidna u tački x_0 , odnosno da funkcija f ima prekid u tački x_0 .

Funkcija je neprekidna nad skupom ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa.

Elementarne funkcije su neprekidne na svojim domenima.

Ako su funkcije f i g neprekidne, tada su neprekidne i funkcije:

$$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}, g \neq 0, \text{ i } f \circ g$$

nad odgovarajućim domenima.

Neka su date funkcije $f : Y \rightarrow Z$ i $g : X \rightarrow Y$. Ako je $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ i f neprekidna u tački A , tada je:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(g(x))) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(A).$$

ZADACI

(1) Ispitati neprekdnost sledećih funkcija:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}, \text{ u tački } x = 2;$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \text{ tački } x = 0;$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \text{ u tački } x = 0,$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ e, & x = 0 \end{cases}, \text{ u tački } x = 0;$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}, \text{ u tački } x = 2;$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 0 \\ (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4-x, & x > 2 \end{cases}, \text{ u tačkama } x = 0 \text{ i } x = 2.$$

(2) Ispitati neprekdnost sledećih funkcija nad $\mathbb{R}$:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ 3x, & x < 1 \end{cases};$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x < 0 \\ 2x-1, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}, & x > 2 \\ x+3, & x \leq 2 \end{cases};$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x}{\sin 3x}, & x > 0 \\ x+2, & x \leq 0 \end{cases};$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases};$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}, & x > 1 \\ 5-3x, & -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{6}{x-4}, & x < -2 \end{cases}.$$

(3) Odrediti konstantu A tako da funkcija:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-3}{8+x}, & x \neq -8 \wedge x \leq 1 \\ A, & x = -8 \end{cases} \quad \text{bude neprekidna u } x = -8;$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} \quad \text{bude neprekidna u } x = 0.$$

(4) Odrediti konstantu A tako da funkcija bude neprekidna u svim tačkama domena:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 1 \\ 3-Ax^2, & x > 1 \end{cases};$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} (e+x)^{\sin x}, & x \geq 0 \\ \sin x + A, & x < 0 \end{cases};$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x > 1 \\ A, & x = 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases};$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 3-4x, & x < 0 \\ x^2+5x-4A, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ \frac{-1}{1+\ln x}, & x > 0 \end{cases};$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 3, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ \frac{\sin 9x}{3x}, & x > 0 \end{cases};$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ A, & x = 0 \\ \frac{x^2-3x}{x^2-2x}, & x < 0 \end{cases}.$$

(5) Odrediti konstante A i B tako da funkcija:

$$(a) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{x}} + 4, & x > 0 \\ A^2, & x = 0 \\ \frac{\sin Bx}{\sin 2x}, & x < 0 \end{cases}, \text{ bude neprekidna u } x = 0,$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A \sin x + B, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ bude neprekidna nad } \mathbb{R};$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}, & x > 0 \\ A, & x = 0 \\ B(1 + e^{\frac{1}{x}}), & x < 0 \end{cases}, \text{ bude neprekidna u } x = 0.$$