LOPITALOVO PRAVILO

Neka su funkcije f i g diferencijabilne u nekoj okolini tačke $a \in \mathbb{R}$, sem eventualno u samoj tački a i neka je $g'(x) \neq 0$ za svako x iz te okoline. Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, i ako postoji $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, $A \in \mathbb{R}$, tada je:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Lopitalovo pravilo važi i ako je $A = \pm\infty$ i kada $x \to \pm\infty$. Takođe važi i u slučaju kada je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

Primer 1. Izračunati $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Kako je $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ i $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ i kako postoji $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$,to je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Primer 2. Izračunati $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^a}$, $a > 0$.

Kako je $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = \infty$, za $a > 0$ i kako postoji $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{ax^a} = 0$,to je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0$.

Obrnuto ne mora da važi, tj. ako ne postoji $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ to ne mora da znači da i $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ne postoji.

Primer 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$ jer je funkcija $\sin x$ ograničena, tj $\sin x \in [-1, 1]$, a $\dfrac{1}{x} \longrightarrow 0$, kad $x \longrightarrow \infty$.

Dakle, ova granična vrednost postoji, a ne može se primeniti Lopitalovo pravilo za njeno izračunavanje jer $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + \cos x}{1}$ ne postoji.

Pored toga što se primenjuje na neodređene izraze oblika „$\dfrac{0}{0}$" i „$\dfrac{\infty}{\infty}$", Lopitalovo pravilo se može primeniti i na ostale neodređene izraze („$0 \cdot \infty$", „$\infty - \infty$", „1^∞", „0^0", „∞^0") koji se elementarnim aritmetičkim transformacijama svode na prethodna dva slučaja.

- „$0 \cdot \infty$“: Ako $f(x) \longrightarrow 0$, $x \longrightarrow a$ i $g(x) \longrightarrow \pm\infty$, $x \longrightarrow a$ tada je

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad \text{ili} \quad \lim_{x\longrightarrow a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}.$$

- „$\infty - \infty$“: Ako $f(x) \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow a$ i $g(x) \longrightarrow \pm\infty$, $x \longrightarrow a$ tada je

$$\lim_{x\longrightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\longrightarrow a} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = \text{"}\infty \cdot 0\text{"}.$$

  Može se desiti i da $1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}$ ne teži u nulu kad x teži a. U tom slučaju $f(x) - g(x)$ teži u $\pm\infty$ kad x teži a.

- „0^0“, „∞^0“ i „1^∞“: U sva tri slučaja izraz oblika $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$ se svodi na oblik „$0 \cdot \infty$“ i to na sledeći način

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x)^{g(x)} = A \Big/ \ln$$

$$\ln A = \ln \lim_{x\longrightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow a} g(x) \ln f(x) = \text{"}0 \cdot \infty\text{"}.$$

Primenom Lopitalovog pravila izračunati granične vrednosti:

(1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}}{x^2-16}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)}$;

(4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x-\sin x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi-2x)^2}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\arcsin 3x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg} 5x}{\mathrm{arctg} 2x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x-x}{x-\sin x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{2x^3}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$;

(14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-2\cos x+1}{x^2}$;

(16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}$;

(17) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\,\mathrm{arctg}\, x}{1-\cos x}$;

(18) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x$;

(19) $\lim\limits_{x\to 1} (\ln(x-1)\ln x)$;

(20) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\, x$;

(21) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$;

(22) $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$;

(23) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

(24) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\mathrm{ctg}\, x-\dfrac{1}{x}\right)$;

(25) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$;

(26) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

(27) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$;

(28) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$;

(29) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$;

(30) $\lim\limits_{x\to 0^+} (3x+1)^{\operatorname{ctg} x}$;

(31) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(32) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{5}{2+3\ln x}}$;

(33) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(34) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+2x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.