

## FUNKCIJE - IZVODI

Neka je funkcija  $y = f(x)$  definisana na intervalu  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ .

Sa  $\Delta x \neq 0$  se označava **priraštaj argumenta** funkcije  $f(x)$  u tački  $x \in (a, b)$  ( $\Delta x$  je mala promena argumenta). Ako tačka  $x + \Delta x$  pripada intervalu  $(a, b)$ , onda je realan broj

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

**priraštaj funkcije**  $f(x)$  u tački  $x$ , koji odgovara priraštaju argumenta  $\Delta x$ .

Ako postoji (konačna) granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

tada se ta granična vrednost naziva **prvi izvod** funkcije  $f(x)$  u tački  $x$  i obeležava sa  $y'$  ili  $f'(x)$ .

Ako je ova granična vrednost jednaka  $\infty$  ili  $-\infty$  funkcija nema izvod u tački  $x$  i kaže se da funkcija ima beskonačan izvod.

Ako se u definiciji prvog izvoda posmatra samo leva, odnosno desna, granična vrednost dobija se levi, odnosno desni, izvod u tački  $x$  koji se označava se sa  $f'_-$ , odnosno  $f'_+$ .

Da bi postojao izvod u nekoj tački moraju postojati i levi i desni izvod i oni moraju biti jednaki.

Napomena: Pod  $f'(x)$  se podrazumeva izvod u proizvoljnoj tački domena. Ako je potrebno odrediti izvod u konkretnoj tački  $x_0$  piše se  $f'(x_0)$ .

Ako funkcija ima izvod u nekoj tački  $x$ , ona je u toj tački neprekidna. Obrnuto ne mora da važi.

Za funkciju koja ima izvod u tački  $x$  kaže se da je diferencijabilna u tački  $x$ .

**Zadatak 1.** Po definiciji odrediti prvi izvod funkcija:

(1)  $f(x) = x^2$ ,

(2)  $f(x) = 3 - x^2$ ,

(3)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $x \neq 1$ ,

(4)  $f(x) = \sqrt{3x+1}$ ,  $x > -\frac{1}{3}$ .

## 1. TABLICA IZVODA ELEMENTARNIH FUNKCIJA

$f(x)$	$f'(x)$	važi za
$c = \text{const}$	0	$x \in \mathbb{R}$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x > 0$
$e^x$	$e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$a \neq 1 \wedge a > 0 \wedge x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a \neq 1 \wedge a > 0 \wedge x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\text{ctg } x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{arcctg } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Napomena: U narednim zadacima izvodi funkcija će biti traženi u oblastima gde postoje i to se neće posebno naglašavati.

## 2. OSOBINE IZVODA

Neka funkcije  $f(x)$  i  $g(x)$  diferencijabilne u okolini tačke  $x \in \mathbb{R}$  i neka  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tada važi:

- (1)  $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$ ,
- (2)  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ ,
- (3)  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ,
- (4)  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ ,  $g(x) \neq 0$ .

**Zadatak 2.** Izračunati prvi izvod funkcija:

- (1)  $y = x^3 - 3x^2 + x^6 - 2$ ,
- (2)  $y = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{6}{5}$ ,
- (3)  $y = \frac{1}{x^2} - 2 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$ ,
- (4)  $y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^4} + 5\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}} + \frac{1}{x}$ ,
- (5)  $y = -\frac{4}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{7}x^2 + x\sqrt{x} + 4$ ,
- (6)  $y = 5^x + \sin x - 5^2 + e^x - e^3$ ,
- (7)  $y = x^3 \ln x$ ,
- (8)  $y = e^x \sin x$ ,
- (9)  $y = \frac{x}{x+1}$ ,
- (10)  $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ,
- (11)  $y = \frac{x^2}{e^x}$ ,
- (12)  $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x}$ ,
- (13)  $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ ,
- (14)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ ,
- (15)  $y = \frac{\ln x}{\cos x} + 3\operatorname{tg} x \cdot e^x$ ,
- (16)  $y = 2x^3 \sin x - e^3 \cdot e^x + 2\frac{\ln x}{x^4}$ .

**Zadatak 3.** Za funkciju  $f(x) = \frac{x^5}{4} + 2e^x$  odrediti  $f'(2)$ .

**Zadatak 4.** Za funkciju  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$  odrediti  $f'(3)$ .

### 3. IZVOD SLOŽENE FUNKCIJE

Neka je funkcija  $g$  diferencijabilna u tački  $x \in \mathbb{R}$  i neka je funkcija  $f$  diferencijabilna u tački  $u = g(x)$ . Tada je funkcija  $f(g(x))$  takođe diferencijabilna u tački  $x$  i važi

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

**Zadatak 5.** Izračunati prvi izvod funkcija:

(1)  $y = (1 - 5x^2)^{10}$ ,

(2)  $y = e^{\sin x} + e^{x^3} + e^{e^x} - e^{\arctg x} + e^{e^e}$ ,

(3)  $y = \cos x^2 + \cos^2 x$ ,

(4)  $y = \ln^5 x + \sin^2 x - \cos^3 x$ ,

(5)  $y = \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ,

(6)  $y = \ln \sin x - \ln \ln x + \ln \arctg x + \ln 5 - \ln x^8 + \ln \frac{1}{x}$ ,

(7)  $y = \sin 3x + \sin e^x - \sin \ln x + \sin \sin x - \sin \cos x + \sin x^5$ ,

(8)  $y = \arctg \sqrt{x} - \arctg x^3 + \arctg \ln x$ ,

(9)  $y = e^{x^3} + 3\text{tg}^4 x$ ,

(10)  $y = \arcsin e^x - 3e^{\arcsin x}$ ,

(11)  $y = \arctg x^3 - \frac{1}{\sqrt{\ln x}} + \sqrt[3]{\sin^5 x}$ ,

(12)  $y = \ln \left( \sin^2 (2x + 1) + (2x + 3)^6 \right)$ ,

(13)  $y = \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ ,

(14)  $y = \sin^3 e^{x^2} + e^{\cos^2 \ln x}$ ,

(15)  $y = \arctg^3 \ln x + \ln^4 \cos x$ ,

(16)  $y = \ln \sqrt{\sin^2 \frac{x+1}{x+5}}$ .

**Zadatak 6.** Odrediti  $f'(0)$  za funkciju  $f(x) = e^{x^3+2x+1}$ .

**Zadatak 7.** Odrediti  $f'(e)$  za funkciju  $f(x) = \ln^2 x + \sqrt{\ln x}$ .

### 4. IZVODI VIŠEG REDA

Neka je funkcija  $y = f(x)$  diferencijabilna i neka je  $f'(x)$  njen prvi izvod. Ako je funkcija  $f'(x)$  diferencijabilna, onda se njen izvod naziva **izvod drugog reda** ili **drugi izvod** funkcije  $f$  u tački  $x$  i označava sa  $y'' = f''(x) = (f'(x))'$ .

Ako postoji,  **$n$ -ti izvod funkcije**  $f(x)$ , u oznaci  $f^{(n)}(x)$ , je prvi izvod funkcije  $f^{(n-1)}(x)$ , tj.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Zadatak 4.** Izračunati drugi izvod funkcija:

$$(1) y = e^{2x} - x^4 + \sin 5x - \ln 4x,$$

$$(2) y = (x - 2) e^{2x},$$

$$(3) y = \frac{x^3}{x^2 - 3},$$

$$(4) y = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2},$$

$$(5) y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}.$$

**Zadatak 5.** Za funkciju  $f(x) = x^3 - e^{2x + \ln x}$ , odrediti  $f''(1)$ .

## 5. IZVOD PARAMETARSKI ZADATIH FUNKCIJA

Parametarski zadata funkcija je ona funkcija  $y = y(x)$  koja je definisana preko funkcija:

$$x = x(t) \quad \text{i} \quad y = y(t) \quad \text{za} \quad t \in I,$$

gde je  $t$  neki parametar, a  $I \subseteq \mathbb{R}$  neki interval realnih brojeva.

Oznake za prvi izvod funkcije po parametru  $t$  su  $\dot{x} = x'_t$  i  $\dot{y} = y'_t$ .

Ako funkcije  $x = x(t)$  i  $y = y(t)$  imaju prve izvode po  $t$  i ako je  $x'_t \neq 0$ , onda je **prvi izvod parametarski zadate**

**funkcije**  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  parametarski zadata funkcija  $\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \end{cases}$ .

**Zadatak 6.** Izračunati prvi izvod parametarski zadatih funkcija:

$$(1) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t^2 - 3t + 5 \end{cases},$$

$$(2) \begin{cases} x = \ln t \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases},$$

$$(3) \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases},$$

$$(4) \begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}.$$

$$(5) \begin{cases} x = \sqrt[3]{t^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{t^4}} \\ y = t^4 + \frac{1}{t^4} \end{cases},$$

$$(6) \begin{cases} x = \sin^2 \ln t \\ y = \cos^3 \ln t \end{cases},$$

$$(7) \begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases},$$

$$(8) \begin{cases} x = \sin t + t^2 \\ y = \ln t - \operatorname{tg} t \end{cases},$$

$$(9) \begin{cases} x = t^2 \cos t - e^{2t} \\ y = \ln \frac{t+1}{t^2-1} \end{cases}.$$

## 6. IMPLICITNO ZADATE FUNKCIJE

Neka je funkcija  $y = f(x)$  zadata implicitno, jednačinom  $F(x, y) = 0$  ili  $F(x, y) = G(x, y)$ . Njen izvod se računa tako što se prvo odredi izvod leve i desne strane jednakosti po promenljivoj  $x$ , pri čemu se vodi računa da je  $x$  nezavisna promenljiva, a  $y = f(x)$  funkcija koja zavisi od  $x$ . Na taj način se i izvod funkcije  $y = f(x)$  dobija u implicitnom obliku. U nekim slučajevima on se može prebaciti u eksplicitni oblik, ali to nije neophodno. Drugi izvod implicitno zadate funkcije se računa na isti način kao i prvi izvod.

**Zadatak 8.** Izračunati prvi izvod implicitno zadatih funkcija:

$$(1) \quad x^2 y^3 + x^3 - y = 0,$$

$$(2) \quad x e^y + y \sin x = x^3,$$

$$(3) \quad x^3 e^{\sin y} + e^{x^2 y^3} = y^4 - x^4,$$

$$(4) \quad x = \ln^3 y - \operatorname{arctg} y^4.$$

## 7. LOGARITAMSKI IZVOD

Logaritamski izvod se koristi za određivanje izvoda funkcija oblika  $y = f(x)^{g(x)}$  kod kojih je  $f(x) > 0$ .

Ovaj postupak podrazumeva da se obe strane jednakosti  $y = f(x)^{g(x)}$  logaritmuju. Nakon toga se dobija funkcija u implicitnom obliku čiji izvod se računa po pravilu za nalaženje izvoda implicitne funkcije, tj.

$$y = f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0$$

$$\ln y = \ln(f(x)^{g(x)})$$

$$\ln y = g(x) \cdot \ln(f(x)) \Big|'$$

$$\frac{1}{y} y' = g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$y' = f(x)^{g(x)} \left[ g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right].$$

Drugi izvod ovih funkcija se određuje na isti način.

**Zadatak 9.** Izračunati prvi izvod funkcija:

$$(1) \quad y = x^{x^2}, \quad x > 0,$$

$$(2) \quad y = x^{\sin x}, \quad x > 0,$$

$$(3) \quad y = x^{\operatorname{tg} x}, \quad x > 0,$$

$$(4) \quad y = (\cos x)^x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z},$$

$$(5) \quad y = (\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x}, \quad x \in (0, 1).$$

## 8. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA PRVOG IZVODA

Neka je dat grafik neprekidne funkcije  $y = f(x)$  nad intervalom  $(a, b)$  i na njemu proizvoljne tačke  $M(x, y)$  i  $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . Sečica koja prolazi kroz tačke  $M$  i  $N$  zaklapa ugao  $\beta$  sa pozitivnim smerom  $x$ -ose i važi:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Kad  $\Delta x \rightarrow 0$ , tačka  $N$  se približava tački  $M$ , a sečica  $MN$  postaje tangenta krive postavljena u tački  $M$ . Ako se ugao između ove tangente i pozitivnog smera  $x$ -ose označi sa  $\alpha$ , onda je

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Dakle, prvi izvod funkcije u nekoj tački predstavlja koeficijent pravca tangente u posmatranoj tački.

Neka funkcija  $y = f(x)$  ima izvod u tački  $x_0$ , tj. neka postoji  $f'(x_0)$ .

**Jednačina tangente**  $t$  na grafik funkcije  $y = f(x)$  u tački  $A(x_0, f(x_0))$  je

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ako je  $f'(x_0) = 0$ , onda je tangenta horizontalna prava  $y = f(x_0)$ .

**Jednačina normale**  $n$  na grafik funkcije  $f(x)$  u tački  $A(x_0, f(x_0))$  je

$$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

ako je  $f'(x_0) \neq 0$ . U slučaju da je  $f'(x_0) = 0$  jednačina normale je vertikalna prava  $x = x_0$ .

**Zadatak 10.** Odrediti jednačine tangente i normale na krive (grafike funkcija):

- (1)  $y = x^2 + 2x$  u tački date krive čija je apscisa  $x = 1$ ,
- (2)  $y = e^{x^2-1}$  u tački date krive čija je apscisa  $x = 1$ ,
- (3)  $y = \operatorname{arctg}x^2$  u tački date krive čija je apscisa  $x = 0$ ,
- (4)  $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg}t \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$  u tački  $A(2, y_0)$  date krive.