

ISPITIVANJE FUNKCIJA

Kada se kaže da treba detaljno ispitati funkciju $y = f(x)$ to znači da treba ispitati sledeće njene osobine:

(1) Oblast definisanosti - domen

Domen predstavlja skup svih vrednosti nezavisne promenljive x za koje je funkcija $y = f(x)$ definisana. Označava se sa D . Domeni nekih funkcija mogu se odrediti na osnovu sledećih pravila:

- funkcija $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ je definisana kada su definisane funkcije $h(x)$ i $g(x)$ i kada je $g(x) \neq 0$;
- funkcija $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, gde je $n \in \mathbb{N}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $g(x) \geq 0$;
- funkcija $f(x) = \sqrt[n+1]{g(x)}$, gde je $n \in \mathbb{N}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$;
- funkcija $f(x) = \ln(g(x))$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $g(x) > 0$;
- funkcija $f(x) = e^{g(x)}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$;
- funkcije $f(x) = \arcsin(g(x))$ i $f(x) = \arccos(g(x))$ su definisane kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $-1 \leq g(x) \leq 1$;
- funkcije $f(x) = \arctg(g(x))$ i $f(x) = \text{arcctg}(g(x))$ su definisane kada je definisana funkcija $g(x)$.

Primer:

$$f(x) = x^3 + x + 1 \quad \implies \quad D = \mathbb{R};$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \implies \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x - 3} \quad \implies \quad D = \mathbb{R} \setminus \{3\};$$

$$f(x) = \frac{e^x - 5x}{(x - 2)(x + 7)} \quad \implies \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-7, 2\};$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \implies \quad D = [0, \infty);$$

$$f(x) = \sqrt{x - 5} \quad \implies \quad D = [5, \infty);$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad \implies \quad D = (-\infty, -2] \cup [2, \infty);$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \implies \quad D = \mathbb{R};$$

$$f(x) = \ln x \quad \implies \quad D = (0, \infty);$$

$$f(x) = \ln(x + 4) \quad \implies \quad D = (-4, \infty);$$

$$f(x) = \ln((x - 3)(x + 5)) \quad \implies \quad D = (-\infty, -5) \cup (3, \infty);$$

$$f(x) = e^x \quad \implies \quad D = \mathbb{R};$$

$$f(x) = \arcsin x \quad \implies \quad D = [-1, 1];$$

$$f(x) = \arccos(x + 5) \quad \implies \quad D = [-6, -4];$$

$$f(x) = \arcsin(x - 3) \quad \implies \quad D = [2, 4];$$

$$f(x) = \arctg x \quad \implies \quad D = \mathbb{R}.$$

(2) **Nule funkcije (presek sa x -osom) i presek sa y -osom**

- Nule funkcije su tačke u kojima grafik funkcije preseca x -osu. Dobijaju se rešavanjem jednačine $y = 0$, tj. $f(x) = 0$.
- Presek sa y -osom je tačka u kojoj grafik funkcije preseca y -osu. Dobija se tako što se uzima da je $x = 0$ i pronalazi vrednost za y .

Primer: Za funkciju $f(x) = x^2 + x - 6$ odrediti nule i presek sa y -osom.

- za $y = 0$ je $x^2 + x - 6 = 0$, što je tačno za $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$. Dakle, nule funkcije su tačke $N_1(-3, 0)$ i $N_2(2, 0)$;
- za $x = 0$ je $f(0) = -6$. Dakle, presek sa y -osom je tačka $M(0, -6)$.

(3) **Znak funkcije**

Znak funkcije govori za koje vrednosti x će funkcija biti pozitivna (iznad x -ose), a za koje vrednosti x će funkcija biti negativna (ispod x -ose). Dobija se rešavanjem nejednakosti $f(x) > 0$ (ili $f(x) < 0$).

Primer: Ispitati znak funkcije $f(x) = x^2 + x - 6$.

Kako je $x^2 + x - 6 = 0$ za $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$, to se može zaključiti da je $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-3, 2)$.

(4) **Parnost - neparnost funkcije**

Ako je domen funkcije simetričan u odnosu na nulu onda je:

- funkcija parna ako važi da je $f(-x) = f(x)$ i tada je grafik funkcije simetričan u odnosu na y -osu,
- funkcija neparna ako važi da je $f(-x) = -f(x)$ i tada je grafik funkcije simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Najčešće funkcija nije ni parna ni neparna i tada kažemo da je "ni-ni".

Primer: Funkcija $f(x) = x^2$ je parna jer je $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ i njen grafik je simetričan u odnosu na y -osu. Funkcija $f(x) = x^3$ je neparna jer je $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ i njen grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak.

(5) **Asimptote funkcije**

• **Vertikalna**

Vertikalna asimptota može da postoji samo u tačkama preki- da funkcije. Neka je $x = a$ tačka prekida funkcije.

- Ako je $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, kažemo da je prava $x = a$ vertikalna asimptota sa leve strane.
- Ako je $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, kažemo da je prava $x = a$ vertikalna asimptota sa desne strane.

Prava $x = a$ je vertikalna asimptota ako je ona vertikalna asimptota i sa leve i sa desne strane.

• **Horizontalna**

Neka domen funkcije nije ograničen. Horizontalna asimptota je prava $y = b$, $b \in \mathbb{R}$ ako je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Horizontalne asimptote funkcije ne moraju biti iste kad $x \rightarrow \infty$, odnosno kad $x \rightarrow -\infty$ i može postojati horizontalna asimptota samo u jednoj od tih vrednosti.

• **Kosa**

Neka domen funkcije nije ograničen. Kosa asimptota je prava

$$y = kx + n, \quad k, n \in \mathbb{R},$$

ako postoje granične vrednosti

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx), \quad k \neq 0 \quad \text{ili}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx), \quad k \neq 0.$$

Kose asimptote funkcije ne moraju biti iste kad $x \rightarrow \infty$, odnosno kad $x \rightarrow -\infty$ i može postojati kosa asimptota samo u jednoj od tih vrednosti.

Postojanje horizontalne asimptote u ∞ isključuje postojanje kose asimptote u ∞ i obrnuto. Isto važi i u $-\infty$.

Primer: Ispitati asimptote sledećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ili drugačije zapisano $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty,$$

pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota date funkcije.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

pa je prava $y = 1$ horizontalna asimptota date funkcije i u ∞ i u $-\infty$.

Kose asimptote ne postoje jer postoji horizontalna asimptota i u ∞ i u $-\infty$.

b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ili drugačije zapisano $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \infty,$$

pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota date funkcije.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty,$$

pa data funkcija nema horizontalnu asimptotu.

Kosa asimptota: $y = kx + n$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1. \end{aligned}$$

Dakle, prava $y = x + 1$ je kosa asimptota date funkcije i u ∞ i u $-\infty$.

(6) Monotonost i ekstremne vrednosti

Neka je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i diferencijabilna na intervalu (a, b) . Tada je:

- funkcija f monotonno rastuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in (a, b)$;
- funkcija f monotonno opadajuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in (a, b)$.

Potreban uslov da diferencijabilna funkcija $f(x)$ u nekoj tački x_0 ima ekstremnu vrednost (lokalni minimum ili maksimum) je da u toj tački važi $f'(x_0) = 0$. Ovaj uslov nije i dovoljan, tj. ako je $f'(x_0) = 0$, to još uvek ne znači da u tački x_0 funkcija ima ekstremnu vrednost. Dovoljan uslov za postojanje ekstremne vrednosti u tački x_0 je da prvi izvod funkcije u tački x_0 menja znak. Ako funkcija $f(x)$ levo od x_0 opada, a desno od x_0 raste, onda ona u tački x_0 ima lokalni minimum. Ako funkcija $f(x)$ levo od x_0 raste, a desno od x_0 opada, onda ona u tački x_0 ima lokalni maksimum.

Tačka x_0 za koju važi da je $f'(x_0) = 0$ naziva se stacionarna tačka.

Primer: Ispitati monotonost i ekstremne vrednosti sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x.$$

$f'(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0, 0)$ stacionarna tačka.

Dakle, ako postoji ekstremna vrednost funkcije $f(x) = x^2$ ona mora biti u tački $O(0, 0)$.

Kako je $f'(x) < 0$ za $x < 0$, na intervalu $(-\infty, 0)$ funkcija opada, a kako je $f'(x) > 0$ za $x > 0$, na intervalu $(0, \infty)$ funkcija raste. To znači da prvi izvod funkcije $f(x) = x^2$ menja znak u okolini tačke $O(0, 0)$ pa je ta tačka lokalna ekstremna vrednost. Kako funkcija levo od tačke $O(0, 0)$ opada, a desno od te tačke raste, to znači da je tačka $O(0, 0)$ lokalni minimum funkcije $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^3$, $D = \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2.$$

$f'(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0, 0)$ stacionarna tačka.

Kako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to funkcija $f(x)$ stalno raste pa nema ekstremnih vrednosti.

(7) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

Neka funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima drugi izvod u svakoj tački intervala (a, b) . Tada je:

- funkcija f konveksna ("smeje se", \smile) na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) > 0$, za svako $x \in (a, b)$;
- funkcija f konkavna ("tužna je", \frown) na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) < 0$, za svako $x \in (a, b)$.

Tačka u kojoj funkcija prelazi iz konveksnosti u konkavnost i obrnuto naziva se prevojna tačka.

Potreban uslov da dva puta diferencijabilna funkcija ima prevoj u nekoj tački x_0 je da je $f''(x_0) = 0$. Ovaj uslov nije i dovoljan, tj. ako je $f''(x_0) = 0$, to ne znači da funkcija $f(x)$ u tački x_0 ima prevoj. Dovoljan uslov za postojanje prevojnih tačaka je da drugi izvod u posmatranoj tački menja znak.

Primer: Ispitati konveksnost, konkavnost i prevojne tačke sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^3$, $D = \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2 \implies f''(x) = 6x.$$

$f''(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0, 0)$ moguća prevojna tačka.

Kako je $f''(x) < 0$ za $x < 0$, na intervalu $(-\infty, 0)$, funkcija je konkavna (\frown), a kako je $f''(x) > 0$ za $x > 0$, na intervalu $(0, \infty)$ funkcija je konveksna (\smile). To znači da drugi izvod funkcije $f(x) = x^3$ menja znak u okolini tačke $O(0, 0)$, što znači da je tačka $O(0, 0)$ prevojna tačka.

b) $f(x) = x^4$, $D = \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^4 \implies f'(x) = 4x^3 \implies f''(x) = 12x^2.$$

$f''(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0, 0)$ moguća prevojna tačka.

Kako je $f''(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to je funkcija $f(x)$ stalno konveksna (\smile) pa nema prevojne tačke.

(8) Grafik funkcije

Na osnovu prethodnih tačaka može se nacrtati grafik funkcije.

Detaljno ispitati date funkcije i nacrtati njihove grafike:

$$(1) f(x) = \frac{x}{x-2};$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2}{x-2};$$

$$(3) f(x) = \frac{4x}{4-x^2};$$

$$(4) f(x) = \frac{x^2-1}{(x+2)^2};$$

$$(5) f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1};$$

$$(6) f(x) = x-2-\frac{6}{x-1};$$

$$(7) f(x) = \frac{x^3+1}{x^2};$$

$$(8) f(x) = x\sqrt{x-1};$$

$$(9) f(x) = \ln \frac{x+3}{1-x};$$

$$(10) f(x) = \ln \frac{x-2}{x+1};$$

$$(11) f(x) = e^{\frac{1}{2-x}};$$

$$(12) f(x) = xe^x.$$