

FUNKCIJE - GRANIČNA VREDNOST

Tačka $x_0 \in \mathbb{R}$ je **tačka nagomilavanja skupa** $X \subseteq \mathbb{R}$ akko svaka okolina tačke x_0 sadrži bar jedan elemenat skupa $X \setminus \{x_0\}$, tj. akko za svako $\varepsilon > 0$ važi $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Tačka $a \in \mathbb{R}$ je **granična vrednost funkcije** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$ i tačka x_0 tačka nagomilavanja domena X , akko za svaku ε -okolinu tačke a postoji δ -okolina tačke x_0 , koja zavisi od ε , takva da se sve tačke iz δ -okoline tačke x_0 bez x_0 , preslikavaju u ε -okolinu tačke a , tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X \setminus \{x_0\})(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon),$$

što se označava sa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Tačka $l \in \mathbb{R}$ je **leva granična vrednost funkcije** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$ i tačka x_0 je tačka nagomilavanja skupa $X \cap \{x \in \mathbb{R} | x < x_0\}$, akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(x \in (x_0 - \delta(\varepsilon), x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon),$$

što se označava sa

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l.$$

Tačka $d \in \mathbb{R}$ je **desna granična vrednost funkcije** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$ i tačka x_0 je tačka nagomilavanja skupa $X \cap \{x \in \mathbb{R} | x > x_0\}$, akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(x \in (x_0, x_0 + \delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x) - d| < \varepsilon),$$

što se označava sa

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = d.$$

Ako postoje leva granična vrednost $l \in \mathbb{R}$ i desna granična vrednost $d \in \mathbb{R}$ funkcije $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$ i tačka x_0 je tačka nagomilavanja skupa X i ako su one jednake, tj. $l = d = a$, tada je a granična vrednost funkcije f u tački x_0 , odnosno

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Prethodne definicije se mogu proširiti i za slučajeve kada x_0 i/ili a teže a $\pm\infty$.

Neka je x_0 tačka nagomilavanja zajedničkog domena $X \subseteq \mathbb{R}$ funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Ako je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, gde je x_0 realan broj, ∞ ili $-\infty$ i c konstanta, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tada važi:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = ca,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \cdot b,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b},$ gde je $b \neq 0$ i za svako $x \in X$ je $g(x) \neq 0$.

Neka su date funkcije $f : Y \longrightarrow Z$ i $g : X \longrightarrow Y$, gde $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}$ i funkcija f je neprekidna u tački a (biće rađeno kasnije), tada je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(a),$$

pri čemu x_0 može biti i $\pm\infty$.

Važne granične vrednosti kod funkcija su:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases},$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} q^x = \begin{cases} 0, & q \in (-1, 1) \\ \infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{ne postoji,} & q \leq -1 \end{cases},$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

ZADACI

(1) Izračunati sledeće granične vrednosti:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1),$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 3}.$

(2) Izračunati sledeće granične vrednosti:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3 - 2x^4}{2x^2 + 3x^5},$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+3x) - 1}{2x},$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3},$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1},$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 - x^2 - x - 2},$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1}.$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}.$$

(3) Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2}{4x^2 - 1},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x^6}{x^2 + 1},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x^3}{x^5 + 1}.$$

(4) Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x+1},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 5x + 6},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{4x}}{1 - \sqrt{x}}.$$

(5) Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 4x},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 2x},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{-3x^2 - 6x},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

(6) Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^{\frac{x}{6}+1},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} \right)^{\frac{2x+4}{3x^2}},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{3} \right)^{\frac{2}{(x-1)^3}},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{x^2},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x},$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - 3}{x + 3} \right)^{\frac{x}{x^2 - 4}}.$$

(7) Izračunati sledeće jednostrane granične vrednosti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x-2}},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x-2}}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1)^{\frac{1}{(x-2)^2}},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)^{\frac{1}{(x-2)^2}},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}.$$