

## Realne funkcije dve (više) realne promenljive

Preslikavanje  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  naziva se **realna funkcija dve realne promenljive** i obeležava sa  $z = f(x, y)$ . Skup  $D$  je domen ili oblast definisanosti.

**Primer 1.** Ako je  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$  tada je

$$f(2, -3) = \frac{2^2 + (-3)^2}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} = \frac{4 + 9}{-12} = -\frac{13}{12},$$
$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \cdot \frac{y}{x}} = \frac{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = f(x, y).$$

**Primer 2.** Oblasti definisanosti sledećih funkcija su:

- (1)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$   
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$
- (2)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$   
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$
- (3)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$   
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (4)  $f(x, y) = \ln x + \ln y$   
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge xy \geq 1\}$ .

**Zadatak 1.** Odrediti oblast definisanosti funkcija:

- (1)  $z = x - \sqrt{x + y}$ ;
- (2)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x + y}}$ ;
- (3)  $z = \frac{3}{\sqrt{x + y}} + \frac{1}{x - y}$ ;
- (4)  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ ;
- (5)  $z = \ln(x + y)$ ;
- (6)  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ;
- (7)  $z = \ln(x - y^2)$ ;
- (8)  $z = \ln(x^2 - y^2)$ .

### Parcijalni izvodi prvog reda (ili prvi parcijalni izvodi)

Neka je funkcija  $z = f(x, y)$ , definisana nad  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Neka tačke  $(x, y)$ ,  $(x + \Delta x, y)$ ,  $(x, y + \Delta y)$  i  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  pripadaju oblasti  $D$ .

**Parcijalni priraštaj funkcije  $z$  po promenljivoj  $x$**  je

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

a **parcijalni priraštaj funkcije  $z$  po promenljivoj  $y$**  je

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

**Totalni priraštaj funkcije  $z$**  je

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

**Parcijalni izvod prvog reda po  $x$**  funkcije  $z = f(x, y)$  je granična vrednost količnika parcijalnog priraštaja  $\Delta_x z$  i priraštaja  $\Delta x$  kad  $\Delta x$  teži nuli, i obeležava se sa  $\frac{\partial z}{\partial x}$ , tj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Analogno je, **parcijalni izvod prvog reda po  $y$**  funkcije  $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Dakle, parcijalni izvod funkcije  $z = f(x, y)$  po  $x$  jednak je običnom izvodu po  $x$ , pod pretpostavkom da je  $y$  konstanta. Analogno važi i za parcijalni izvod po  $y$ .

**Primer 3.** Ako je  $f(x, y) = x^2 y^3$ , onda je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

**Prvi totalni diferencijal (ili totalni diferencijal prvog reda) funkcije  $z = f(x, y)$**

Neka funkcija  $z = f(x, y)$  ima neprekidne parcijalne izvode u nekoj okolini tačke  $M(x, y)$ . Tada se izraz

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

naziva prvi totalni diferencijal funkcije  $z = f(x, y)$ .

**Primer 4.** Prvi totalni diferencijal funkcije  $f(x, y) = x^2 y^3$  je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy.$$

**Zadatak 2.** Odrediti parcijalne izvode prvog reda i prvi totalni diferencijal funkcija:

- (1)  $z = x^3 y + 2xy^4 + y^3 + 3y + 6$ ;
- (2)  $z = \frac{xy}{x+y}$ ;
- (3)  $z = e^{xy}$ ;

**Zadatak 3.** Odrediti parcijalne izvode prvog reda funkcija:

- (1)  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ;
- (2)  $z = xe^y - y \sin x + x^2 y^2 - x^3 + y^4$ ;
- (3)  $z = e^x e^y + x^2 e^y - e^{x^3} \cos y$ ;
- (4)  $z = 2x^4 + y^3 + x^2 y^3 - x \ln y$ ;
- (5)  $z = x^3 \cos y - e^x \ln y + \sin^3 x - \ln^2 y$ .
- (6)  $z = \sin(x + \cos y) + e^{x^2 + 3y}$ ;
- (7)  $z = \ln x \cdot e^{x+y} + \sin(x^2 y^3)$ ;
- (8)  $z = x^3 \cos y - e^x \ln y + \sin^3 x - \ln^2 y$ ;
- (9)  $z = \sin(xe^{xy})$ ;
- (10)  $z = \frac{\ln(xy)}{y}$ ;
- (11)  $z = \ln(xy) \arcsin(4y)$ .

## Parcijalni izvodi drugog reda (ili drugi parcijalni izvodi)

Parcijalni izvodi  $\frac{\partial z}{\partial x}$  i  $\frac{\partial z}{\partial y}$  su u opštem slučaju opet funkcije dve promenljive  $x$  i  $y$ , pa se mogu odrediti i njihovi parcijalni izvodi ukoliko postoje. Tako se mogu dobiti četiri nova parcijalna izvoda drugog reda funkcije  $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ i } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Ako su funkcija  $z = f(x, y)$  i njeni parcijalni izvodi  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  i  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  neprekidni u okolini tačke  $M(x, y)$  onda važi da je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

**Primer 5.** Parcijalni izvodi drugog reda funkcije  $f(x, y) = x^2 y^3$  su  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2$  i  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 y$ .

### Drugi totalni diferencijal funkcije (ili totalni diferencijal drugog reda) $z = f(x, y)$

Neka funkcija  $z = f(x, y)$  ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u nekoj okolini tačke  $M(x, y)$ . Tada se izraz

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

naziva drugi totalni diferencijal funkcije  $z = f(x, y)$ .

**Primer 6.** Drugi totalni diferencijal funkcije  $f(x, y) = x^2 y^3$  je

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

**Zadatak 4.** Odrediti parcijalne izvode prvog i drugog reda i prvi i drugi totalni diferencijal funkcija:

- (1)  $z = x^2 - 2xy^2 + y^3$ ;
- (2)  $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ ;
- (3)  $z = \frac{y}{x}$ ;

**Zadatak 5.** Odrediti parcijalne izvode prvog i drugog reda funkcija:

- (1)  $z = x \sin 4y$ ;
- (2)  $z = \sin(x + 2y)$ ;
- (3)  $z = \frac{2x}{y^2}$ ;
- (4)  $z = \ln(x - 4y)$ ;
- (5)  $z = e^{x-4y}$ .
- (6)  $z = x^3 + y^4 + x^3 y^2 + e^x e^y$ ;
- (7)  $z = x^2 - 2xy^2 + \ln(xy^2)$ ;
- (8)  $z = ye^{x^3} + \sin x \ln y + \text{ctg}(x + y)$ ;
- (9)  $z = \ln(x + y) + x^2 \sin y$ ;
- (10)  $z = e^{2x+2} \text{tgy} + \sqrt{xy}$ .