

Realne funkcije dve realne promenljive - ekstremne vrednosti

Funkcija $z = f(x, y)$ definisana u oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ ima lokalni ekstrem u tački (x, y) ako je Δz istog znaka za sve dovoljno male vrednosti Δx i Δy ((x, y) , $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pripadaju oblasti D), i to lokalni maksimum ako je $\Delta z < 0$, a lokalni minimum ako je $\Delta z > 0$.

Potreban uslov da diferencijabilna funkcija $z = f(x, y)$ ima lokalni ekstrem u tački $T(x_0, y_0) \in D$ jeste da je

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Tačke u kojima je zadovoljen potreban uslov za lokalnu ekstremnu vrednost nazivaju se **stacionarne tačke**.

Dovoljani uslovi za postojanje lokalne ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ u tački T :

* Neka je $T(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x, y)$. Neka u nekoj okolini tačke $T(x_0, y_0)$, uključujući i tu tačku, funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode i neka je

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0), \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Tada, ako je

- (1) $rs - t^2 > 0$ i $r > 0$ (ili $s > 0$), funkcija $z = f(x, y)$ u tački $T(x_0, y_0)$ ima **lokalni minimum**;
- (2) $rs - t^2 > 0$ i $r < 0$ (ili $s < 0$), funkcija $z = f(x, y)$ u tački $T(x_0, y_0)$ ima lokalni maksimum;
- (3) $rs - t^2 < 0$, funkcija $z = f(x, y)$ u tački $T(x_0, y_0)$ **nema lokalne ekstreme**;
- (4) $rs - t^2 = 0$, **potrebna su dalja ispitivanja**.

Zadatak. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije:

- (1) $z = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6$;
- (2) $z = xy$;
- (3) $z = \frac{x}{y} + \frac{2}{x} + 4y$, $x > 0$, $y > 0$;
- (4) $z = -x^3 - y^3 + 3xy$;
- (5) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;
- (6) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 1$;
- (7) $z = x^2 + 3xy^2 - 12x$;
- (8) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;
- (9) $z = \ln(y - 2xy) + xy - x$;
- (10) $z = 2x^3 + y^2 - 6x + 18y + 12$;
- (11) $z = e^{-x^2 - y^2}$;
- (12) $z = -2x^2 - 2y^2 + 4x - 12y - 18$;
- (13) $z = x^2 + 2y^2 - 2x + 8y - 2xy + 10$;
- (14) $z = (x^2 + y) \sqrt{e^y}$;
- (15) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;
- (16) $z = x^3 + 2y^2 - 3xy + 3x - 5y$.