

# ODREĐENI INTEGRAL

Neka je  $f(x)$  funkcija definisana i ograničena na zatvorenom intervalu  $[a, b]$ . Podelimo interval  $[a, b]$  na  $n$  podintervala tačkama

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b.$$

i označimo dužinu svakog podintervala sa  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . U intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  izaberimo proizvoljnu tačku  $\alpha_i$  i formirajmo zbir

$$I(P) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i \quad .$$

$I(P)$  se naziva **integralna ili Rimanova suma** za funkciju  $f(x)$  u intervalu  $[a, b]$ .

Ako postoji granična vrednost sume  $I(P)$  kada maksimalno  $\Delta x_i$  teži nuli, nezavisna od podele intervala  $[a, b]$  i načina izbora tačke  $\alpha_i$  iz intervala  $[x_{i-1}, x_i]$ , tada kažemo da funkcija  $f(x)$  ima **određeni integral**, tj. da je **integrabilna u Rimanovom smislu**, i pišemo

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad .$$

Vrednost  $a$  naziva se donja, a  $b$  gornja granica integracije.

Neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu je integrabilna na tom intervalu u Rimanovom smislu.

Monotona funkcija na zatvorenom intervalu je integrabilna na tom intervalu u Rimanovom smislu.

## • Osobine određenog integrala

1. Ako su  $f(x)$  i  $g(x)$  integrabilne funkcije na  $[a, b]$ , a  $A$  i  $B$  konstante, tada je

$$\int_a^b (A f(x) \pm B g(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx \pm B \int_a^b g(x) dx.$$

2. Ako je  $f(x)$  integrabilna funkcija na intervalu  $[a, b]$ , tada je

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3. Za proizvoljnu funkciju  $f(x)$  zadovoljeno je

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4. Ako je  $f(x)$  integrabilna funkcija nad intervalima  $[a, b]$ ,  $[a, c]$  i  $[c, b]$ , tada je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

5. Ako je  $f(x)$  nenegativna, (odnosno nepozitivna) funkcija nad intervalom  $[a, b]$ , onda je

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (\text{odnosno} \quad \int_a^b f(x) dx \leq 0).$$

6. Ako su  $f(x)$  i  $g(x)$  integrabilne funkcije nad  $[a, b]$  i ako je  $f(x) \leq g(x)$  nad istim intervalom, tada je i

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

## 7. Njutn-Lajbnicova formula

Ako je  $f(x)$  integrabilna funkcija nad intervalom  $[a, b]$ , i ako  $f(x)$  ima primitivnu funkciju  $F(x)$ , tj. ako je

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad , \quad (F'(x) = f(x)),$$

tada je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Pr1.

- $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} (2^4 - 1^4) = \frac{15}{4};$
- $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} (\sqrt{4^3} - \sqrt{1}) = \frac{14}{3};$
- $\int_1^3 e^x dx = e^x \Big|_1^3 = e^3 - e;$
- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = -(\cos x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2}) = 1;$
- $\int_2^8 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_2^8 = \ln 8 - \ln 2 = \ln \frac{8}{2} = \ln 4;$
- $$\begin{aligned} \int_1^9 \frac{2x^2 + x^2\sqrt{x} - 1}{x^2} dx &= \int_1^9 (2 + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}) dx \\ &= \left( 2x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^9 \\ &= (2 \cdot 9 + \frac{2}{3}\sqrt{9^3} + \frac{1}{9}) - (2 \cdot 1 + \frac{2}{3}\sqrt{1^3} + \frac{1}{1}) \\ &= 32\frac{4}{9}. \end{aligned}$$

• **Smena promenljivih kod određenog integrala**

Neka je dat  $\int_a^b f(x) dx$ , gde je  $f(x)$  neprekidna funkcija nad intervalom  $[a, b]$ . Uvedimo novu promenljivu prema formuli  $x = \phi(t)$ . Ako su zadovoljeni uslovi

- $\phi(\alpha) = a, \quad \phi(\beta) = b,$
- $\phi(t)$  i  $\phi'(t)$  su neprekidne funkcije nad intervalom  $[\alpha, \beta],$
- $f(\phi(t))$  je definisana i neprekidna nad intervalom  $[\alpha, \beta],$

onda je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt.$$

Pr2.

- $$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left( \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0 \\ x = e \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{array} \right)$$
$$= \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$
- $$\int_1^2 e^{2x} dx = \left( \begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 4 \end{array} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \int_2^4 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_2^4 = \frac{1}{2} (e^4 - e^2).$$
- $$\int_1^2 2x(x^2 + 3)^4 dx = \left( \begin{array}{l} x^2 + 3 = t \\ 2x dx = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 4 \\ x = 2 \Rightarrow t = 7 \end{array} \right)$$
$$= \int_4^7 t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_4^7 = \frac{1}{5} (7^5 - 4^5).$$

$$\begin{aligned}
4. \int_1^2 \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx &= \left( \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2} dx = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \end{array} \right) \\
&= -\int_2^{\frac{3}{2}} \sqrt{t} dt = -\frac{2}{3} \sqrt{t^3} \Big|_2^{\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{2}{3} \left( \sqrt{\frac{27}{8}} - \sqrt{8} \right).
\end{aligned}$$

• **Parcijalna integracija kod određenog integrala**

Neka su  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  kao i njihovi izvodi neprekidne funkcije nad intervalom  $[a, b]$ . Tada je

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Pr3.

$$\begin{aligned}
1. \int_1^e \ln x dx &= \left( \begin{array}{ll} u = \ln x & , \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & , \quad v = x \end{array} \right) = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - 1 \cdot \ln 1 - x \Big|_1^e = e - (e - 1) = 1. \\
2. \int_1^2 x e^x dx &= \left( \begin{array}{ll} u = x & \quad dv = e^x dx \\ du = dx & \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right) = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = x e^x \Big|_1^2 - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.
\end{aligned}$$

ZADATAK: Izračunati vrednost sledećih određenih integrala:

1.  $\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx;$
2.  $\int_0^2 (x + 3x^2) dx;$
3.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx;$
4.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx;$
5.  $\int_1^2 x e^x dx;$
6.  $\int_1^2 \frac{x}{x^2 + 2} dx;$
7.  $\int_0^1 \arcsin x dx;$
8.  $\int_0^1 \frac{x - 3}{x^2 + 2x + 2} dx;$
9.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx;$
10.  $\int_0^1 x^4 (1 + x^5) dx;$
11.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + 5}{\cos^2 x} dx;$
12.  $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 - 2)^5} dx;$

13.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx;$
14.  $\int_1^2 \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} \, dx;$
15.  $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 2x} \, dx;$
16.  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 3x + 5} \, dx;$
17.  $\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}} \, dx;$
18.  $\int_e^{e^2} x \ln x \, dx;$
19.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x};$
20.  $\int_1^2 \frac{e^x - 8}{e^{2x} + 4} \, dx;$
21.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 x - \sqrt{\sin x}) \cos x \, dx;$