

# INTEGRALI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Integrali oblika  $\int r(\sin x, \cos x) dx$ , u kojima je podintegralna funkcija racionalna funkcija koja zavisi od  $\sin x$  i  $\cos x$  mogu se opštom trigonometrijskom smenom

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

svesti na integral racionalne funkcije po  $t$ .

Pri uvođenju ove smene dobija se:

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Napomena:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

**Zadatak 1.** Rešiti integrale

1.  $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$ ;
2.  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ ;
3.  $\int \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 3} dx$ .

Uvođenjem opšte trigonometrijske smene često se dobijaju glomazne i teške podintegralne funkcije pa se zbog toga posmatraju specijalni slučajevi integrala ovog oblika koji se mogu rešiti na jednostavniji način.

Integral oblika  $\int r(\sin x, \cos x) dx$  se u slučaju da važi  $r(\sin x, -\cos x) = -r(\sin x, \cos x)$  može izraziti u obliku integrala  $\int r_1(\sin x) \cos x dx$  koji se smenom

$$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt$$

svodi na integral racionalne funkcije po  $t$ .

Integral oblika  $\int r(\sin x, \cos x) dx$  se u slučaju da važi  $r(-\sin x, \cos x) = -r(\sin x, \cos x)$  može izraziti u obliku integrala  $\int r_1(\cos x) \sin x dx$  koji se smenom

$$\cos x = t, \quad -\sin x dx = dt$$

svodi na integral racionalne funkcije po  $t$ .

**Zadatak 2.** Rešiti integrale

1.  $\int \sin x \cos x dx$ ;
2.  $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} dx$ ;
3.  $\int (1 + \sin^2 x) \operatorname{ctg} x dx$ ;

$$4. \int \frac{dx}{\sin x \sin 2x};$$

$$5. \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx;$$

$$6. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx;$$

$$7. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$$