INTEGRALI RACIONALNIH FUNKCIJA

Funkcija $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, gde su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi nad poljem realnih brojeva, naziva se **racionalna funkcija**.

Racionalne funkcije se dele na prave i neprave. **Prava** racionalna funkcija je ona kod koje je $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$, a **neprava** ona kod koje je $\deg(p(x)) \geq \deg(q(x))$.

Primer:
$r(x) = \dfrac{2x-1}{3x^2+5}$ je prava racionalna funkcija;
$r(x) = \dfrac{x^3+6}{x-1}$ je neprava racionalna funkcija;
$r(x) = \dfrac{x-7}{x+9}$ je neprava racionalna funkcija;

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije ili samo polinoma.

Prave racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

gde $A, B, C, a, p, q \in \mathbb{R},\ k, m \in \mathbb{N}$ i $p^2 - 4q < 0$, nazivaju se **parcijalni razlomci**.

Svaka prava racionalna funkcija može se predstaviti u obliku zbira parcijalnih razlomaka.

Rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne razlomke

- Ukoliko je racionalna funkcija **neprava** vrši se deljenje polinoma u brojiocu sa polinomom u imeniocu. Nakon deljenja dobija se polinom ili zbir polinoma i prave racionalne funkcije.

- **Faktoriše** se polinom u imeniocu prave racionalne funkcije nad poljem realnih brojeva (faktori su linearni ili kvadratni koji nemaju realne nule).

- Prava racionalna funkcija **rastavlja se na zbir parcijalnih razlomaka**. Posmatraju se faktori imenioca prave racionalne funkcije.

  - Faktor oblika $(x-a)^k$ daje sledećih k sabiraka parcijalnih razlomaka sa konstantama u brojiocima:

  $$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

  - Faktor oblika $(x^2+px+q)^m$, $p^2-4q<0$, daje sledećih m sabiraka parcijalnih razlomaka sa opštim linearnim polinomima u brojiocima:

  $$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, \ldots, \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Izračunavanje integrala oblika $\int r(x)dx$, gde je $r(x)$ racionalna funkcija, se u opštem slučaju svodi na izračunavanje jednog ili više integrala oblika:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx$, $x \neq a$;
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$, $x \neq a$, $k \geq 2$;
3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, $p^2-4q<0$;
4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$, $p^2-4q<0$, $n \geq 2$.

Integrali prvog i drugog tipa rešavaju se jednostavno korišćenjem smene $x-a=t$, $dx=dt$:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = \left(\begin{array}{c} x-a=t \\ dx=dt \end{array}\right) = A\int \frac{1}{t}\,dt = A\ln|t|+c = A\ln|x-a|+c \ ;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \left(\begin{array}{c} x-a=t \\ dx=dt \end{array}\right) = A\int \frac{1}{t^k}\,dt = A\int t^{-k}\,dt = A\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+c = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+c \ ;$$

Integral trećeg tipa se rastavlja na dva integrala kako bi se mogla primeniti smena $x^2+px+q=t$, $(2x+p)\,dx=dt$.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx \ .$$

Prvi od ovih integrala nakon uvođenja smene postaje tablični:

$$\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \left(\begin{array}{c} x^2+px+q=t \\ (2x+p)\,dx=dt \end{array}\right) = \frac{A}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{A}{2}\ln|t|+c = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+c_1$$

Drugi od ovih integrala se mora transformisati tako što se kvadratni trinom koji se nalazi u imeniocu zapiše u kanoničkom obliku. Zatim se smenom $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$ ovaj integral svodi na tablični:

$$\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx = \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\text{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+c_2.$$

Integrali četvrtog tipa se rešavaju korišćenjem rekurentne formule što izlazi iz okvira ovog kursa i neće biti rađeno.

Zadatak Rešiti integrale

1. $\int \frac{1}{x-3}\,dx$;
2. $\int \frac{1}{3-x}\,dx$;
3. $\int \frac{1}{(x-3)^5}\,dx$;
4. $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$;
5. $\int \frac{1}{x^2+5x}\,dx$;
6. $\int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}\,dx$;
7. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$;

8. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\, dx;$

9. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx;$

10. $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2\left(x^2 + 1\right)}\, dx;$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx;$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2 - 5x + 7}\, dx;$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{-2x^2 + 3x - 5}\, dx;$

14. $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx;$

15. $\displaystyle\int \frac{x + 5}{x^2 + 3x + 4}\, dx;$

16. $\displaystyle\int \frac{3x - 2}{2x^2 - 3x + 4}\, dx.$