INTEGRALI IRACIONALNIH FUNKCIJA

Integrali oblika $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$ i $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $a \neq 0$ rešavaju se na sličan način kao integrali racionalne funkcije oblika $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, $p^2-4q<0$.

Zadatak 1. Rešiti integrale

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;
3. $\displaystyle\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$;
4. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-x+2}}\,dx$.

Integrali oblika $\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $a \neq 0$ gde je $p_n(x)$ polinom n-tog stepena po x $(n \geq 1)$, rešavaju se primenom identiteta

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde je $q_{n-1}(x)$ polinom po x stepena $n-1$ čije koeficijente treba odrediti, a $\lambda \in \mathbb{R}$ neodređena konstanta koju takođe treba odrediti.

Da bi se odredili koeficijenti polinoma $q_{n-1}(x)$ i λ potrebno je odrediti izvod prethodne jednakosti

$$\frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = q'_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+q_{n-1}(x)\cdot\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Množenjem ove jednakosti sa $\sqrt{ax^2+bx+c}$ dobija se

$$p_n(x) = q'_{n-1}(x)\cdot\left(ax^2+bx+c\right)+q_{n-1}(x)\cdot\left(ax+\frac{b}{2}\right)+\lambda.$$

Sada su sa obe strane znaka jednakosti polinomi po x stepena n, pa se njihovim izjednačavanjem dobijaju vrednosti koeficijenata polinoma $q_{n-1}(x)$ i konstante λ.

Zadatak 3. Rešiti integrale

1. $\int \frac{4x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;
2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$;
3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$;
4. $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$.