

Grafovi

February 28, 2021

$V \neq \emptyset$

V -KONACNA
SKUP

E -KONACNA
SKUP

$\{u, v\}, u \neq v$

(u, v)

$\{u, v\} = \{v, u\}$

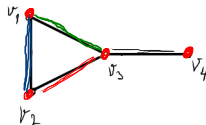
Graf G je uređen par (V, E) , gde je V konačan neprazan skup elemenata koji se zovu **čvorovi**, a E je konačan skup različitih neuređenih parova različitih elemenata skupa V koji se zovu **grane**, tj. $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$.

Graf se može predstaviti geometrijski crtežom u ravni.

Čvorovi grafa se predstavljaju tačkama u ravni, a grane grafa linijama koje povezuju odgovarajuće čvorove.

Primer 1. Graf

$$G = (\underbrace{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}}_V, \{\underbrace{\{v_1, v_2\}}_{\text{blue}}, \underbrace{\{v_1, v_3\}}_{\text{green}}, \underbrace{\{v_2, v_3\}}_{\text{red}}, \underbrace{\{v_3, v_4\}}_{\text{black}}\})$$





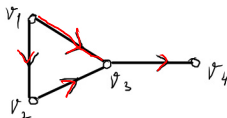
Ako je $e = \{u, v\}$ grana grafa G kaže se da grana e **spaja** čvorove u i v , ili da je grana e **incidentna** čvorovima u i v , a za čvorove u i v se kaže da su **susedni**.

Za sve grane koje su incidentne istom čvoru kaže se da su **susedne grane**.

Ako su u grafu G elementi skupa E različiti uređeni parovi elemenata skupa V , tj. $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}$, onda je to **orijentisan graf**.

Primer 2. Orijetisan graf

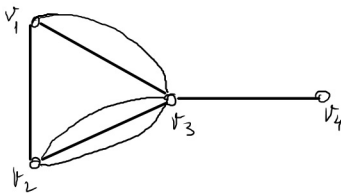
$G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\})$



Ako u grafu G neuređeni (uredjeni) parovi skupa E ne moraju biti različiti, tj. grane ne moraju biti različite već može postojati više grana koje spajaju dva čvora, onda je to **multigraf**.

Primer 3. Multigraf

$$G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\})$$

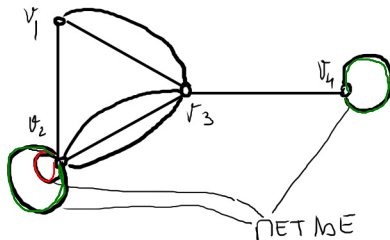


Grana grafa koja polazi iz i završava se u istom čvoru naziva se **petlja**.

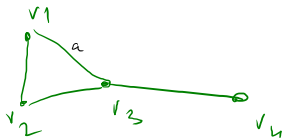
Multigraf koji u sebi sadrži i petlje naziva se **pseudograf**.

Primer 4. Pseudograf

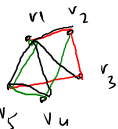
$$G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_4\}\})$$



Na dalje će sve biti rađeno isključivo za neorijentisane grafove bez petlji i bez više grana koje spajaju dva čvora. Takvi grafovi se često nazivaju **prosti grafovi**.



$$G = \{ \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{ \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\} \}$$



Put dužine k ($k \geq 1$) grafa G je niz grana oblika $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}$, piše se često i $v_0 - v_1 - v_2 - \dots - v_k$.

Elementarni (prost) put je put koji kroz svaki svoj čvor prolazi najviše jednom.

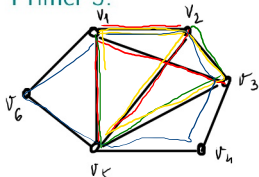


Zatvoren (kružni) put je put koji se završava u istom čvoru u kom i počinje.



Kontura (ciklus) dužine n je elementarni zatvoren put i označava se sa C_n .

Primer 5.



put: v_1 - v_2 - v_5 - v_1 - v_3

elementarni put: v_1 - v_2 - v_3 - v_4

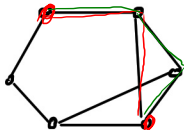
zatvoren put: (v_1) - v_2 - v_5 - v_3 - v_2 - (v_1)

kontura: v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_1

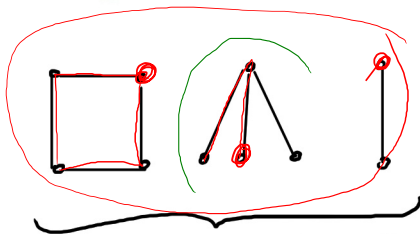
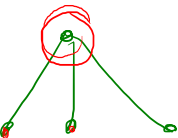
Povezan graf je graf kod kog su svaka dva čvora povezana putem.
Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem graf je **nepovezan**.

Nepovezan graf se sastoji od dva ili više odvojenih delova, koji se nazivaju **komponente povezanosti grafa**.

Primer 6.



ПОВЕЗААН ГРАФ

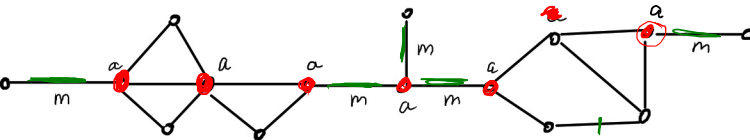


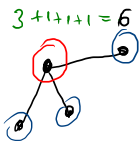
НЕПОВЕЗААН ГРАФ СА 3
КОМПОНЕНТЕ ПОВЕЗАНОСТИ

Artikulacioni čvor grafa je čvor čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenta povezanosti grafa.

Most grafa je grana čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenta povezanosti grafa.

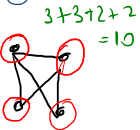
Primer 7. Sa a su obeleženi artikulacioni čvorovi, a sa m mostovi.





Stepen čvora v , u oznaci $\deg(v)$, jednak je broju grana koje su sa čvorom v incidentne, tj. koje imaju kraj u tom čvoru.

Ako grana spaja čvor sa samim sobom, tj ako je petlja, onda se ona računa dva puta.

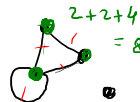


Čvor stepena 0 naziva se **izolovan čvor**, a čvor stepena 1 **list ili viseći čvor**.

Totalni stepen grafa je zbir svih stepena grafa i jednak je dvostrukom broju grana.



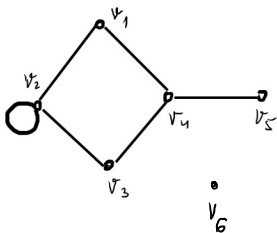
Oдавде sledi da ne postoji graf sa neparnim totalnim stepetnom.



Grana koja spaja čvor sa stepenom jedan je **viseća grana**.



Primer 8.



$$\deg(v_1) = 2 \checkmark$$

$$\deg(v_2) = 4 \checkmark$$

$$\deg(v_3) = 2 \checkmark$$

$$\deg(v_4) = 3 \checkmark$$

$$\deg(v_5) = 1 \quad \text{- list } \checkmark$$

$$\deg(v_6) = 0 \quad \text{- izolovan čvor } \checkmark$$

$$\text{totalni stepen} = 12$$

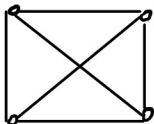
→ Broj čvorova neparnog stepena je u svakom (prostom) grafu paran.

$$\text{Broj GRAFA} \quad \frac{12}{2} = 6$$

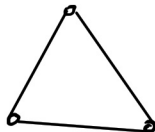
PROD GRAFA GRAFA JE 7 → ON JE TOTALNOG STEPENA $7 \cdot 2 = 14$

Graf je **regularan** ako su svi čvorovi istog stepena. Ako su pri tome svi čvorovi stepena k kaže se da je graf **k -regularan**.

Primer 9.



3-REGULARAN GRAF



2-REGULARAN GRAF

Kompletan graf je prost graf kod koga su svaka dva čvora spojena granom, tj. kod koga su svaka dva čvora susedna.

Kompletan graf sa n čvorova se označava sa (K_n) , i ima $\binom{n}{2}$ grana.

Prazan graf je graf u kome nikoja dva čvora nisu susedna. To je 0-regularan graf, tj. graf koji se sastoji samo od izolovanih čvorova.

Primer 10.

КОМПЛЕТНИ ГРАФОВИ :

K_1

K_2

K_3

K_4

K_5

ПРАЗАН ГРАФ :

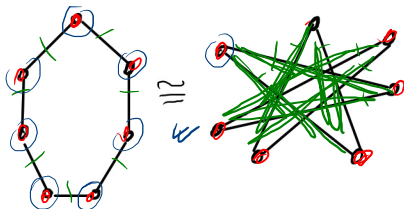
o o o

Dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su **izomorfna** ako postoji bijekcija $f : V_1 \rightarrow V_2$ koja održava osobinu susednosti čvorova. Piše se $G_1 \cong G_2$.

Izomorfni grafovi su ustvari isti grafovi samo različito nacrtani.

→ Izomorfni grafovi moraju imati isti broj čvorova, isti broj grana i iste stepene čvorova.

Primer 11.

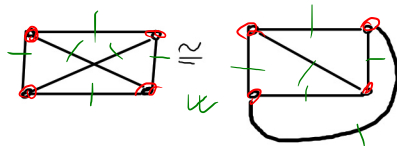


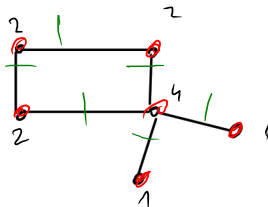
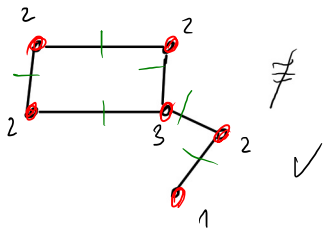
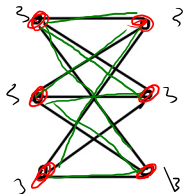
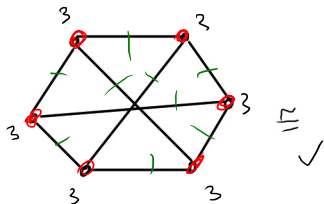
157 1803

ČVOROVA ✓

GRANA ✓

STEPENA



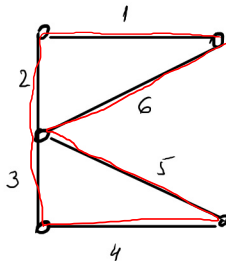
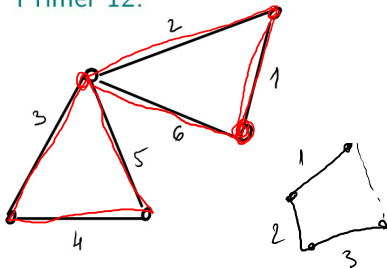


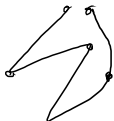
Ojlerova kontura grafa G je zatvoren put koji sadrži sve grane grafa G . Graf koji ima Ojlerovu konturu je **Ojlerov graf**.

Ojlerov put u grafu G je put koji sadrži sve grane grafa G . Graf koji ima Ojlerov put je **poluojlerov graf**.

Svaki Ojlerov graf je i poluojlerov, a obrnuto ne mora da važi.

Primer 12.





Ako je graf Ojlerov moguće ga je nacrtati iz jednog poteza (bez dizanja olovke sa papira) tako da se preko svake grane prelazi tačno jednom i da se crtež završava u početnom čvoru. U slučaju da se crtež ne završava u početnom čvoru onda je graf poluojlerov.

SVAKA DVA ČVORA POVEZANA PUNIM

Povezan graf sa bar jednom granom je poluojlerov akko sadrži najviše dva čvora neparnog stepena (dakle, 0 ili 2) pošto ne može biti 1 čvor neparnog stepena jer je broj čvorova neparnog stepena u svakom grafu paran).

Ukoliko graf ima 0 čvorova neparnog stepena, tada crtanje počinje i završava se u istom čvoru, pa je graf ustvari Ojlerov, a ako ima dva čvora neparnog stepena, tada crtanje počinje u jednom od njih a završava se u drugom.

Ojlerova Teorema: Povezan graf sa bar jednom granom je Ojlerov akko su mu svi čvorovi parnog stepena.



POVEZAN GRAF (SA BAR JEDNOM GRANOM) :

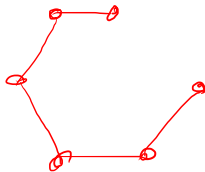
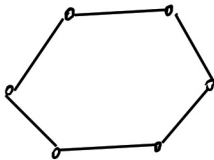
0 - ČVOROVA NEPARNOG STEPENA → OJLEROV
2 - ČVOROVA NEPARNOG STEPENA → POLUOJLEROV
VIŠE - NIJE NI JEDNO NI DRUGO

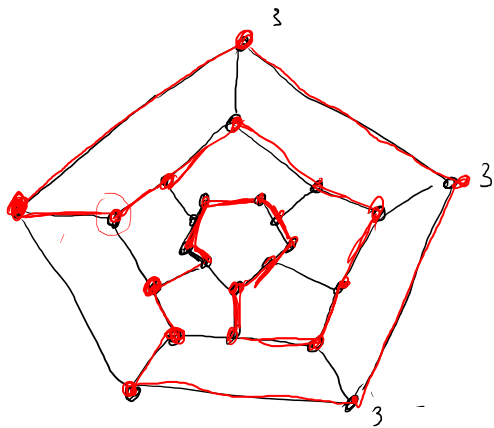
Hamiltonova kontura grafa G je kontura koja sadrži sve čvorove grafa G . Graf koji ima Hamiltonovu konturu je **Hamiltonov graf**.

Hamiltonov put u grafu G je elementarni put koji sadrži sve čvorove grega G . Graf koji ima Hamiltonov put je **poluhamiltonov graf**.

Svaki Hamiltonov graf je i poluhamiltonov graf, a obrnuto ne mora da važi.

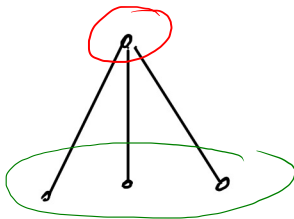
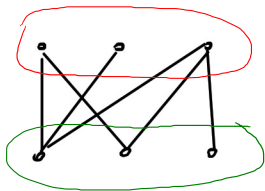
Primer 13.





Bipartitan graf je graf čiji se skup čvorova može podeliti na dva disjunktne skupa na takav način da svaka grana spaj čvor prvog skupa sa čvorom drugog skupa.

Primer 14.

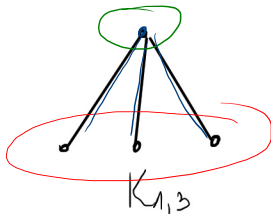
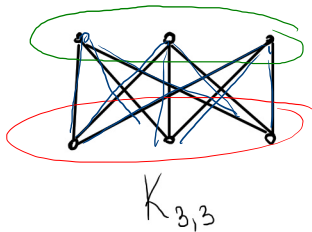


DISJUNKTNI SKUPOVI = PRESEK IM JE $\emptyset$

Kompletan bipartitni graf je bipartitni graf kod kog je svaki čvor prvog skupa susedan sa svakim čvorom drugog skupa.

Kompletan bipartitni graf se označava sa $K_{m,n}$, gde su m i n brojevi elemenata u svakom od disjunktih skupova.

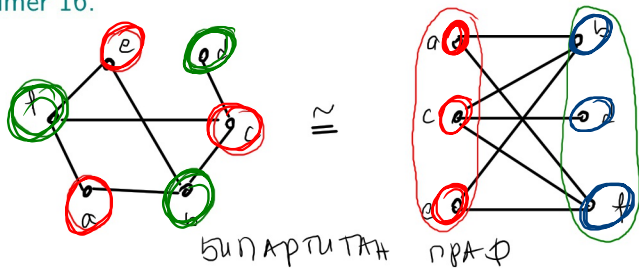
Primer 15.

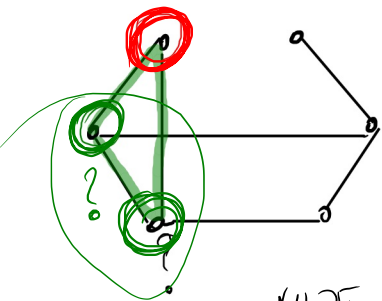


Graf je bipartitan akko ne sadrži neparne konture, tj. konture sa neparnim brojem čvorova.

Da li je graf koji ne sadrži neparne konture bipartitan ispitivaće se na sledeći način: krene se od jednog čvora koji se oboji jednom bojom, zatim se njegovi susedi oboje drugom bojom, pa njihovi susedi opet onom prvom i tako redom dok se ne oboje svi čvorovi grafa. Ako je moguće obojiti sve čvorove tako da je svaka grana incidentna sa dva čvora različite boje onda je graf bipartitan.

Primer 16.





NICE BIPARTITE

Stablo je graf u kome su svaka dva čvora povezana tačno jednim putem.

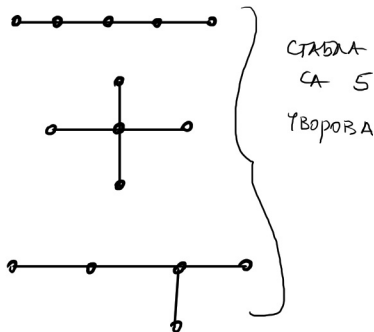
Primer 17.

- - ЈЕДИНО СТАБЛО СА ЈЕДИНИМ ТВОРОМ, ТЗВ. ПУЛЈАКО СТАБЛО

• - ЈЕДИНОСТАНО СТАБЛО СА 2 ТВОРА

• - ЈЕДИНОСТАНО СТАБЛО СА 3 ТВОРА

• - СТАБЛО СА 4 ТВОРА

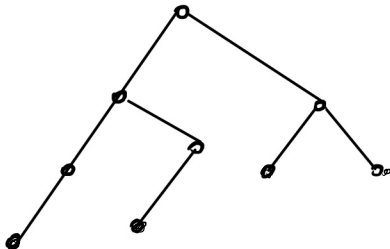
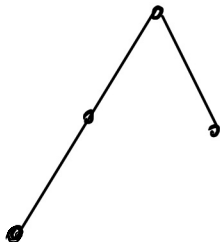


Svako stablo je bipartitni graf.

Svako neprazno stablo ima bar jedan list, tj. čvor stepena 1.

Najčešće korišćeno stablo je stablo u kom svaki čvor koji nije krajnji mora imati dve grane. Takvo stablo se naziva **binarno stablo**.

Primer 18.



ZADACI

1. Da li postoji graf sa 77 čvorova u kom svaki čvor ima stepen 7?

NE

2. (a) Koliko grana ima 5-regularni graf sa 100 čvorova?

→ svi čvorovi su stepena 5

$100 \cdot 5 \Rightarrow 500$ ← TOTALNI STEPEN GRAFA

BROJ GRANA $\frac{500}{2} = \underline{\underline{250}}$

$$\frac{\text{TOTALNI STEPEN GRAFA}}{2} = \text{BROJ GRANA}$$

TOTALNI STEPEN GRAFA = ZBIR SVIH STEPENA

(b) Koliko čvorova ima 5-regularni graf sa 100 grana?

n -čvorova

totalni stepen je $n \cdot 5$

broj grana = $\frac{\text{totalni stepen}}{2}$

$$100 = \frac{n \cdot 5}{2}$$

$$n \cdot 5 = 200$$

$$n = 40 \text{ čvorova}$$

3 čvorova

$$1 - 5$$

$$2 - 5$$

$$3 - 5$$

$$5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5$$

7 čvorova

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$$

$$= 7 \cdot 5$$

n čvorova

$$\underbrace{5 + 5 + 5 + 5 + \dots + 5}$$

C)

- 4-STEPEN - SVAKO ČVORAK U GRAFU,

TD. GRAF JE 4-REGULARAN

- KOLIKO IMA 60 GRANA
KOLIKO IMA ČVORAKA?

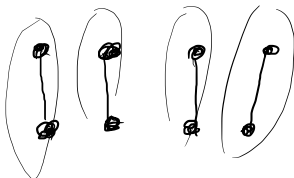
$$\text{BRD GRANA} = \frac{\text{TOTALNI STEPEN GRAFA}}{2} \Rightarrow 60 = \frac{\text{TOTALNI STEPEN}}{2}$$

$$\text{TOTALNI STEPEN GRAFA} = \underline{\underline{120}}$$

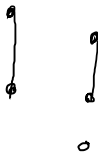
$$120 = x \cdot 4$$

$$x = 30$$

3. (a) Nacrtati 1-regularan graf sa 8 čvorova?



(b) Za koje prirodne brojeve n postoji 1-regularan graf sa n čvorova?

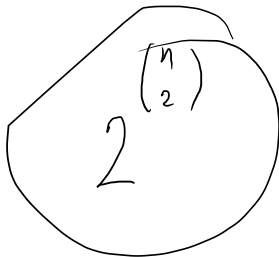


n - MORA BITI
PARAN BROJ

4. Koliko na skupu $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ima
(a) različitih grafova;

NEKA GRAF IMA n -CVOROVA
 $\Rightarrow$ IMA NAJVIŠE $\binom{n}{2}$ GRANA
 $\binom{n}{2}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \dots$



RAZLIČNIH
GRAFOVA



$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2} = 6$$



(b) različitih grafova sa tačno m grana?

n - BROJ CVOROVA

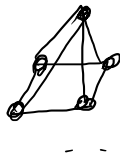
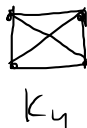
$\binom{n}{2}$ - BROJ GRANA

$$\binom{\binom{n}{2}}{m}$$

5. Odrediti broj čvorova i grana za sledeće grafove:

(a) kompletan graf K_n ;

K_n $\rightarrow$ n -čvorova
 $\rightarrow$ $\binom{n}{2}$ - grana



$(n-1)$ -REGULARAN

(b) prazan graf $\overline{K}_n$;

$\overline{K}_n$ —> prazni evrobova n
prazni grafi

K_1

K_2

K_3

K_4

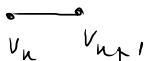
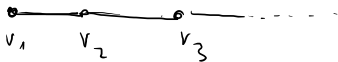
0-REGULARAN



2-REGULARAN

NIZI KOMPLETAN

(c) put P_{n+1} ;



$P_{n+1} \rightarrow$ вершина $n+1$
 $\searrow$ графа n

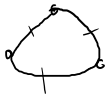
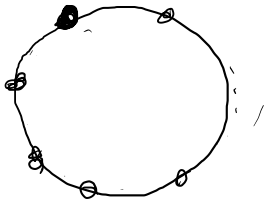


НИЗ РЕГУЛЯРНО

$$\deg(v_1) = \deg(v_{n+1}) = 1$$

$$\text{вн остри } \deg = 2$$

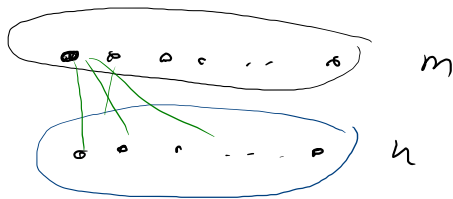
(d) konturu C_n



C_n - / n VEREVA
 $\rightarrow$ n GRAFA

2-REGULARAN

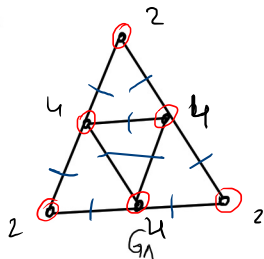
(e) kompletan bipartitan graf $K_{m,n}$.



$K_{m,n}$ — čvorova $m+n$
— grana $m \cdot n$

6. Da li su sledeći grafovi izomorfni?

a)

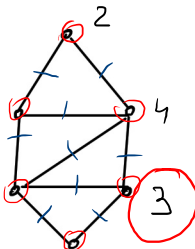


6 VOROVA

9 GRANA

NEMA

OVOR STEPENA 3



G_2

6 VOROVA

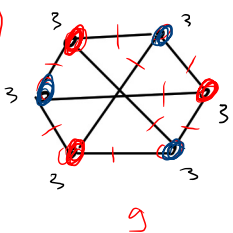
9 GRANA

IMA

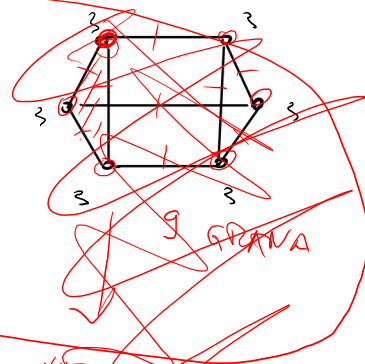
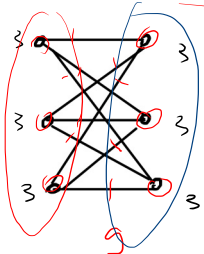
OVOR STEPENA 3

5

??
0 0



210



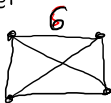
9 GRAVA

NIDE

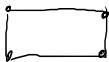
120MB PFAU

SA PRA DUA

1 KOMPONENTA 7. Nacrtati sve neizomorfne grafove sa 4 čvora.



4



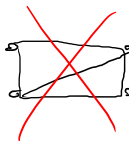
3



4



3



2 KOMPONENTE



3



2

3, KOMPONENTE



4, KOMPONENTE



- 8) Nacrtati sve neizomorfne grafove sa 4 čvora i bar jednom konturom dužine 3.

4

rešen

9. Nacrtati sve neizomorfne grafove sa 4 čvorai tačno jednom konturom dužine 3.

(2)

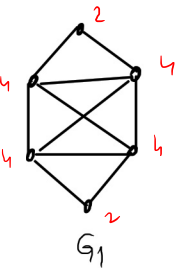
10. Nacrtati vse neizomorfne povezane grafove sa 4 čvora.

G

11. Nacrtati vse neizomorfne povezane grafove sa 3 čvora.

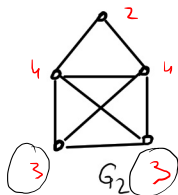


12. Koji od grafova na slici su Ojlerovi, a koji poluojlerovi?

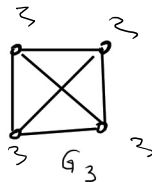
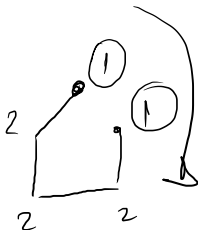


Ojlerov

0 neparnog

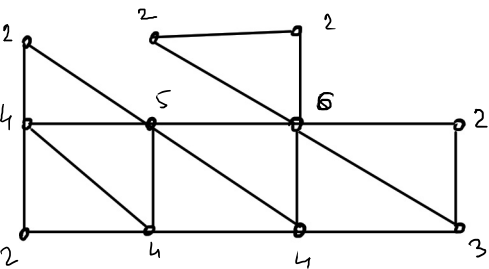


Poluojlerov



Nije ništa

2 neparnog

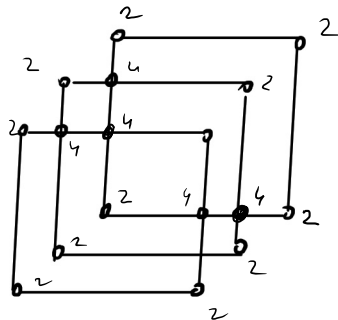


НИЖЕ ОДЛУКОВ

3,5 - 2 НЕРАВНОС



ПОЛУ ОДЛУКОВ



ОДЛУКОВ

13. Za koje n su sledeći grafovi Ojlerovi ili poluojlerovi:

(a) kompletan graf K_n , $(n \geq 3)$

K_n - n -BO CVOROVA



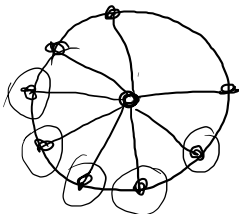
$(n-1)$ -REGULARAN GRAF

I n -NEPARAN BROJ $\Rightarrow n-1$ - PARAN BROJ $\Rightarrow$ SVI CVOROVI
SU PARNOG STEPENA $(n-1)$ - OJEROVI

II n -PARAN BROJ $\Rightarrow n-1$ NEPARAN BROJ
 $\Rightarrow$ IMAMO PAK 4 CVOVA NEPARNOG
STEPENA

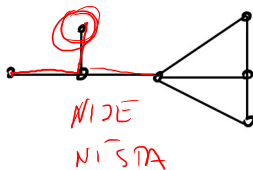
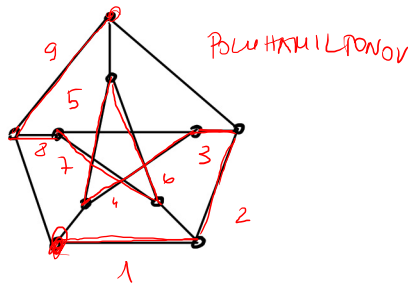
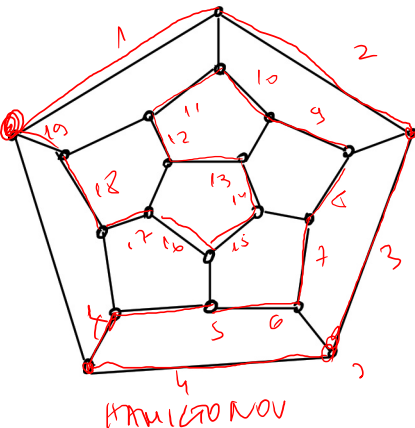
$\Rightarrow$ NIJE OJEROV NI POLUOJEROV

(b) točak W_n , $n \geq 4$.



NIJE NI DZIGEROV
NI POLUDZIGEROV
DZIGERO IMA BAR 3
CVRKA NEPARNOG
STEPENA

14. Koji od grafova na slici su Hamiltonovi, a koji poluhamiltonovi?



15. Nacrtati sva neizomorfna stabla sa 5 čvorova.

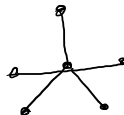
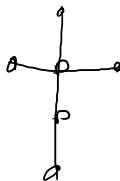
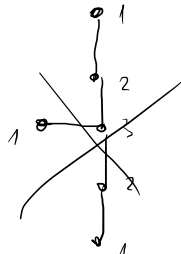


16. Narišati sva neizomorfna stabla sa 6 čvorova.

2.



3.



17. Nacrtati sva neizomorfna stabla sa 7 čvorova, od kojih su najviše 3 viseća .

~~3~~

