

RELACIJE

Uređen par elemenata a i b , u oznaci (a, b) je $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, gde je a prva komponenta, a b druga komponenta uređenog para.

Napomena: $(b, a) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ pa za $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$.

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Dekartov proizvod skupova A i B je skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A , a druga komponenta iz skupa B , tj. $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$

$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$

$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$

Na osnovu ovog primera može se zaključiti da Dekartov proizvod nije komutativan, tj. $A \times B \neq B \times A$.

Dekartov kvadrat skupa A je $A^2 = A \times A = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in A\}$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$

$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Binarna relacija je bilo koji podskup od $A \times B$, tj. $\rho \subseteq A \times B$.

Ako uređen par (x, y) pripada relaciji ρ kaže se da su x i y u relaciji ρ i piše se $(x, y) \in \rho$ ili $x\rho y$.

Binarna relacija skupa A , je bilo koji podskup od A^2 , tj. $\rho \subseteq A^2$.

Kako je $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ to su $\emptyset$ i A^2 sigurno relacije skupa A , i one se nazivaju prazna i puna relacija.

Relacije koje imaju konačno mnogo elemenata se mogu zadati na više načina. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $\rho \subseteq A^2$ tada se ρ može zadati na sledeće načine:

- nabrojanjem elemenata: $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\}$

- pomoću drugih relacija: $\rho = \{(x, y) \in A^2 | x^2 + y \leq 6\}$

- tablično:

ρ	1	2	3
1	⊤	⊤	⊤
2	⊤	⊤	⊥
3	⊥	⊥	⊥

- grafički.

Relacije koje imaju beskonačno mnogo elemenata mogu se zadati pomoću drugih relacija ili se mogu opisati rečima govornog jezika.

*Primer *:* $A = \{1, 2, 3\}$

$\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

$\rho_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

$\rho_3 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$\rho_4 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

$\rho_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

Inverzna relacija relacije ρ je $\rho^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in \rho\}$

Primer: Inverzne relacije relacija iz Primera * su:

$\rho_1^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

$\rho_2^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

$$\rho_3^{-1} = \{(1, 1), (3, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$$

$$\rho_4^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$\rho_5^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2)\}$$

Osnovne osobine binarne relacije ρ skupa $A \neq \emptyset$:

- **refleksivnost (R)**: $(\forall x \in A) x\rho x$
- **simetričnost (S)**: $(\forall x, y \in A) (x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
- **antisimetričnost (A)**: $(\forall x, y \in A) (x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$ ili $(\forall x, y \in A) ((x\rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \neg(y\rho x))$
- **tranzitivnost (T)**: $(\forall x, y, z \in A) ((x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z)$

Primer: Ispitati osobine relacija iz Primera *.

Relacija je u isto vreme simetrična i antisimetrična akko za svaki njen par važi da su mu komponente jednake, jer ako se pojavi par čije su komponente različite $(a, b) \in \rho$, $a \neq b$, tada simetričnost zahteva da njemu simetričan par pripada relaciji, tj. $(b, a) \in \rho$, ali onda antisimetričnost zahteva da bude $a = b$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom da su komponente različite.

ZADACI

- (1) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa

$$A = \{a, b, c\}:$$

$$\rho_1 = \{(a, b), (a, c), (b, c)\},$$

$$\rho_2 = \{(a, a)\},$$

$$\rho_3 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (a, c), (c, c)\},$$

$$\rho_4 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, c)\}.$$

- (2) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ i odrediti inverzne relacije datih relacija:}$$

$$\rho_1 = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1)\},$$

$$\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\},$$

$$\rho_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\},$$

$$\rho_4 - \text{relacija "deli"}.$$

- (3) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}:$$

$$\rho_1 = \{(4, 5), (3, 4), (5, 3), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\},$$

$$\rho_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\},$$

$$\rho_3 = \{(3, 3), (6, 6)\},$$

$$\rho_4 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\},$$

$$\rho_5 = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 2)\},$$

$$\rho_6 = \emptyset,$$

$$\rho_7 = A^2.$$

- (4) Date relacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ako je moguće, dopuniti tako da budu refleksivne, simetrične, odnosno tranzitivne i sve to u isto vreme.

$$\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (2, 4)\},$$

$$\rho_2 = \{(3, 3), (5, 5)\},$$

$$\rho_3 = \{(3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\},$$

$$\rho_4 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (1, 3), (2, 4)\}.$$

(5) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{N}$:

$$\rho_1 = \{(x, x+2) \mid x \in \mathbb{N}\},$$

$$\rho_2 = \{(x, y) \mid x+y=7, x, y \in \mathbb{N}\},$$

$$\rho_3 = \{(x, y) \mid y=4x+1, x, y \in \mathbb{N}\},$$

$$\rho_4 = \{(5x, 5x) \mid x \in \mathbb{N}\}.$$

$$\rho_5 = \{(x, y) \mid x+y \text{ je paran broj}, x, y \in \mathbb{N}\},$$

(6) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

$$\rho_1 = \{(2, x) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_2 = \{(x, y) \mid x+y=3, x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_3 = \{(x, y) \mid y^2 = x^2, x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_4 = \{(5x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$$\rho_5 = \{(x, 5x-4) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$$\rho_6 = \{(x, y) \mid x \cdot y > 0, x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_7 = \{(x, y) \mid x \cdot y = 0, x, y \in \mathbb{R}\},$$

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija ekvivalencije (RST)** akko je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primer: relacija jednakosti = na skupu realnih brojeva, relacija paralelnosti $\parallel$ na skupu svih pravih u prostoru, relacija podudarnosti na skupu svih duži, relacija $\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (5, 5)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,....

Svaka relacija ekvivalencije ρ definisana na skupu A vrši particiju tog skupa, tj. jednoznačno određuje neke neprazne podskupove skupa A od kojih su svaka dva disjunktna, a njihova unija je skup A . Važi i obrnuto. Za datu particiju skupa A može se definisati relacija ρ na skupu A tako što će proizvoljna dva elementa biti u relaciji ρ akko pripadaju istom podskupu te particije. Ovako definisana relacija je RST relacija.

Primer: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- RST relaciji $\rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (4, 5), (5, 4)\}$ jednoznačno odgovara particija $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$,
- RST relaciji $\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ jednoznačno odgovara particija $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$,
- RST relaciji $\rho_3 = A^2$ jednoznačno odgovara particija $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$,
- particiji $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}$ jednoznačno odgovara relacija ekvivalencije $\rho_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4)\}$,
- particiji $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ jednoznačno odgovara relacija ekvivalencije $\rho_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$.

Na nekom konačnom skupu A može se definisati onoliko relacija ekvivalencije koliko ima particija.

Primer: Sve particije skupa $A = \{1, 2, 3\}$ su: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{1, 2, 3\}$, što znači da se na skupu A može definisati najviše 5 različitih RST relacija.

ZADACI

- (1) Neka je dat skup $A = \{1, 2, 3\}$ i jedna njegova particija $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Odrediti relaciju ekvivalencije skupa A koja odgovara datoj particiji.
- (2) Neka je dat skup $A = \{1, 2, 3\}$ i relacija $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$. Proveriti da li je ova relacija relacija ekvivalencije skupa $A = \{1, 2, 3\}$, i ako jeste odrediti particiju skupa A u odnosu na relaciju ρ .
- (3) Relaciju $\rho = \{(2, 2), (1, 3), (5, 5), (3, 4)\}$, ako je moguće, dopuniti do relacije ekvivalencije ρ_1 skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a zatim odrediti particiju skupa A u odnosu na relaciju ρ_1 .
- (4) Napisati relaciju ekvivalencije ρ skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ koja odgovara particiji $\{\{1, 3, 4\}, \{5\}, \{2, 6\}\}$.

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija poretka (RAT)** akko je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Uređen par (A, ρ) je parcijalno uređen skup akko je $A \neq \emptyset$ i ρ RAT relacija skupa A .

Primer: relacije $\leq$ i $\geq$ na skupu prirodnih brojeva, relacija deli $|$ na skupu prirodnih brojeva, relacija $\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \dots$

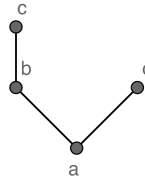
Neka je ρ relacija poretka skupa A . Tada je:

- $a \in A$ **najmanji** element skupa A akko $\forall x \in A, a \rho x$, tj.
 $a \in A$ najmanji element skupa A akko je on u relaciji sa svakim elementom,
- $a \in A$ **najveći** element skupa A akko $\forall x \in A, x \rho a$, tj.
 $a \in A$ najveći element skupa A akko je svaki element u relaciji sa njim,
- $a \in A$ **minimalni** element skupa A akko $\neg (\exists x \in A)(x \rho a \wedge x \neq a)$, tj.
 $a \in A$ minimalni element skupa A akko ni jedan drugi element nije u relaciji sa njim osim njega samog,
- $a \in A$ **maksimalni** element skupa A akko $\neg (\exists x \in A)(a \rho x \wedge x \neq a)$, tj.
 $a \in A$ maksimalni element skupa A akko nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom osim sa samim sobom.

Grafik relacije poretka naziva se **Haseov dijagram**. Svakoj relaciji poretka jednoznačno odgovara jedan Haseov dijagram i obrnuto, na osnovu Haseovog dijagrama se jednoznačno može rekonstruisati relacija poretka kojoj odgovara posmatrani Haseov dijagram.

Primer: Relacija $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\}$ je relacija poretka skupa $A = \{a, b, c, d\}$.

- najmanji element: a
- najveći element: nema
- minimalni element: a
- maksimalni element: c, d



Ako postoji najmanji element on je jedinstven.

Ako postoji najveći element on je jedinstven.

Minimalnih i maksimalnih elemenata može biti više.

Ako postoji najmanji element on je i jedini minimalni element.

Ako postoji najveći element on je i jedini maksimalni element.

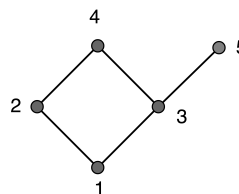
Primer:

- Relacija $\leq$ u skupu $\mathbb{N}$: jedini minimalni i najmanji element je 1, a najvećeg i maksimalnog elementa nema.
 Relacija $\geq$ u skupu $\mathbb{N}$: jedini maksimalni i najveći element je 1, a najmanjeg i minimalnog elementa nema.
- Relacija deli u skupu $\mathbb{N}$ definisana je sa $m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = km$. Najmanji i jedini minimalni element je 1, a najvećeg i maksimalnog elementa nema.
 Relacija deli na skupu $A = \{2, 3, 5, 12\}$. Najmanji i najveći element ne postoje, minimalni elementi su 2, 3 i 5, a maksimalni 5 i 12.
- Relacija $\subseteq$ u partitivnom skupu nekog skupa $A \neq \emptyset$. Jedini minimalni i najmanji element je $\emptyset$, a jedini maksimalni i najveći element je A .

ZADACI

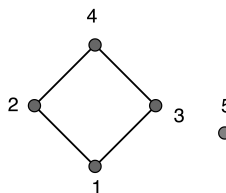
- (1) Data je binarna relacija $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

- najmanji element: 1
- najveći element: nema
- minimalni element: 1
- maksimalni element: 4, 5



- (2) Data je binarna relacija $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

- najmanji elemenat: nema
- najveći elemenat: nema
- minimalni elemenat: 1, 5
- maksimalni elemenat: 4, 5



Ako elemenat $a \in A$ nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom skupa A , niti je bilo koji elemenat skupa A u relaciji sa njim, tada je elemenat a istovremeno i minimalni i maksimalni elemenat.

- (3) Data je binarna relacija $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (b, e)\}$ na skupu $A = \{a, b, c, d, e\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).
- (4) Date relacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $$\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\},$$
- $$\rho_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (2, 4)\},$$
- $$\rho_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\},$$
- $$\rho_4 = \{(2, 1), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}.$$

dopuniti, ako je moguće, do relacija poretka, a zatim nacrtati njihove Haseove dijagrame i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

- (5) Neka je $A = \{a, b, c\}$. Nacrtati Haseov dijagram parcijalno uređenog skupa $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, a zatim ispitati najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje) parcijalno uređenih skupova $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{A\}, \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}, \subseteq)$ i $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A, \{a, b\}, \{a, c\}\}, \subseteq)$.
- (6) Na skupu $A \subseteq \mathbb{N}$ definisana je relacija poretka " $|$ " (deli) na sledeći način:

$$x | y \iff \exists k \in \mathbb{N}, y = kx.$$

Odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje) ako je A :

- $A = \mathbb{N}$,
- $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$,
- $A = D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$,
- $A = D_{42} \setminus \{1\}$,
- $A = D_{42} \setminus \{1, 42\}$,
- $A = \{2, 4, 6, 12, 18\}$.

- (7) (Domaći) Neka je :

$$A_1 = \{a, b, c, d, e, f\}, \rho_1 = \{(x, x) \mid x \in A\} \cup \{(b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, e), (d, e), (d, f)\},$$

$$A_2 = \{b, c, d, e, f\}, \rho_2 = \rho_1 \setminus \{(a, a)\},$$

$$A_3 = \{b, c, d, e\}, \rho_3 = \rho_1 \setminus \{(a, a), (f, f), (b, f), (d, f)\}.$$

Za one relacije ρ_i koje jesu relacije poretka nad odgovarajućim skupom A_i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:

Zadatak 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.11