

MATRICE

Matrica A , formata (tipa) $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F} = (F, +, \cdot)$ je “pravougaona šema” elemenata polja $\mathbb{F}$, tj.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

pri čemu su a_{ij} , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ elementi polja $\mathbb{F}$.

Kad god nije naglašeno drugačije, podrazumeva se da je matrica nad poljem realnih brojeva.

Horizontalni redovi u matrici se zovu vrste, a vertikalni kolone. Indeks m predstavlja broj vrsta, a indeks n broj kolona u matrici. Element a_{ij} matrice $[a_{ij}]_{m \times n}$ je element koji se nalazi u i -toj vrsti i j -toj koloni.

Matrice koje imaju isti broj vrsta i kolona (tj. $m = n$), nazivaju se **kvadratne matrice**.

Dve matrice su jednake akko su istog formata i ako su im svi elementi na odgovarajućim pozicijama jednaki.

Matrica čiji su svi elementi jednaki nuli polja $\mathbb{F}$ naziva se **nula matrica** nad poljem $\mathbb{F}$ i označava se $O = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Kvadratna matrica koja na glavnoj dijagonali kao elemente ima jedinice polja $\mathbb{F}$, a na svim ostalim mestima nule polja $\mathbb{F}$ naziva se **jedinična matrica** nad poljem $\mathbb{F}$ i označava sa E ili I .

- **Sabiranje matrica** $[a_{ij}]_{m \times n}$ i $[b_{ij}]_{m \times n}$ definiše se sa:

$$[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Dakle, matrice se mogu sabirati samo ako su istog formata i to tako što im se sabere elementi na odgovarajućim mestima.

Primer:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suprotna matrica matrici $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, je matrica $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$.

OSOBINE SABIRANJA MATRICA:

Za matrice A , B , C i nula matricu O formata $m \times n$ važe sledeće osobine:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + O = A$,
- $A + (-A) = O$,
- $A + B = B + A$.
- Dakle, $(\mathcal{M}_{m \times n}, +)$, gde je $\mathcal{M}_{m \times n}$ skup svih matrica formata $m \times n$, nad poljem $\mathbb{F}$, je komutativna grupa.

- **Množenje matrice** $[a_{ij}]_{m \times n}$ **skalarom** (brojem) α (iz istog polja iz kog su elementi matrice) definiše se sa:

$$\alpha[a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}.$$

Dakle, matrica se množi skalarom tako što se svaki njen element pomnoži tim skalarom.

Primer:

$$(-3) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}.$$

OSOBINE MNOŽENJA MATRICE SKALAROM:

Za skalare α , $\beta \in F$ i matrice A i B nad poljem $\mathbb{F}$ važe sledeće osobine:

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, pri čemu su A i B matrice istog formata,
- $1 \cdot A = A$.

- **Proizvod matrica** $[a_{ij}]_{m \times k}$ i $[b_{ij}]_{k \times n}$ definiše se sa:

$$[a_{ij}]_{m \times k} [b_{ij}]_{k \times n} = [c_{ij}]_{m \times n},$$

gde se svaki element unutar matrice $[c_{ij}]_{m \times n}$ dobija po formuli:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^k a_{ip} b_{pj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Dakle, dve matrice se mogu pomnožiti samo ako je broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge matrice. Rezultat je matrica čiji je broj vrsta isti kao kod prve matrice, a broj kolona isti kao kod druge matrice. Element u i -toj vrsti i j -toj koloni proizvoda dobija se tako što se elementi i te vrste prve matrice pomnože sa odgovarajućim elementima j -te kolone druge matrice i dobijeni proizvodi se saberu.

Primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

OSOBINE MNOŽENJA MATRICA:

Za skalar $\alpha \in F$ i kvadratne matrice A, B, C reda $n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F}$, i jediničnu matricu E reda n , važe sledeće osobine:

- $A(BC) = (AB)C$,
- $(A+B)C = AC + BC$,
- $A(B+C) = AB + AC$,
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
- $EA = AE = A$.

Dakle, $(\mathcal{M}_{n \times n}, \cdot)$, gde je $\mathcal{M}_{n \times n}$ skup svih kvadratnih matrica formata n , nad poljem $\mathbb{F}$, je asocijativni grupoid sa neutralnim elementom, a $(\mathcal{M}_{n \times n}, +, \cdot)$, je prsten sa jedinicom.

- Komutativnost ne važi prilikom množenja dve matrice, tj. u opštem slučaju je $AB \neq BA$.

Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ je

$AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, a $BA = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Očigledno je $AB \neq BA$.

- Ako je $AB = 0$ ne sledi da je $A = 0$ ili $B = 0$, tj. postoje delitelji nule.

Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ je $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Ako je $AB = AC$ ne sledi da je $B = C$.

Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ je $AB = AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ a očigledno je $B \neq C$.

ZADACI

(1) Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Izračunati $3A - 2B + 5E$.

(2) Ako je moguće izračunati:

- $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$
- $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [2],$
- $[2] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(3) Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}.$ Izračunati $A^2 + BC - 3E.$

• **Transponovanje matrice** se vrši tako što sve odgovarajuće vrste i kolone u matrici zamene mesta. Transponovana matrica matrice A formata $m \times n$, u oznaci A^T je matrica formata $n \times m$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Primer: Za $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ je $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$

OSOBINE TRANSPONOVANJA MATRICE:

Za skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ i matrice A i B važe sledeće osobine:

- $(A^T)^T = A,$
- $(A + B)^T = A^T + B^T,$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T,$
- $(AB)^T = B^T A^T,$ pri čemu su A i B kvadratne matrice.

Determinanta kvadratne matrice A reda n , $n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F}$ je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Adjungovana matrica kvadratne matrice A reda n , $n \in \mathbb{N}$, nad poljem $\mathbb{F}$, dobija se tako što se svaki element a_{ij} matrice A zameni njegovim odgovarajućim kofaktorom A_{ij} i zatim se izvrši transponovanje, tj.

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Primer: Za matricu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, njena adjungovana matrica je

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot a_{22} & (-1)^{1+2} \cdot a_{21} \\ (-1)^{2+1} \cdot a_{12} & (-1)^{2+2} \cdot a_{11} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

tj. adjungovana matrica za kvadratnu matricu reda 2 dobija se tako što dijagonalni elementi u matrici međusobno zamene mesta, a ostali elementi promene znak.

Ako je A kvadratna matrica reda n i ako postoji kvadratna matrica X takva da je $AX = XA = E$, tada je X **inverzna matrica** matrice A . Inverna matrica matrice A označava se sa A^{-1} .

Kvadratna matrica je **regularna** ako ima inverznu matricu, a **singularna** ako nema inverznu.

Kvadratna matrica A je regularna (ima inverznu matricu) akko je njena determinanta različita od nule (tj. $\det(A) \neq 0$), i tada je:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A).$$

Primer: Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ je $\det(A) = -3$, a $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, pa je $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

OSOBINE INVERZNE MATRICE:

Za regularne matrice A i B reda n i jediničnu matricu I reda n važe sledeće osobine:

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Primer: Odrediti A^{-1} , ako postoji, za $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Determinanta matrice A je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -28 - 18 + 4 + 21 - 4 + 24 = -1;$$

kofaktori su:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -32, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -25, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1,$$

pa je adjungovana matrica

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -32 & -2 & 25 \\ -14 & -1 & -11 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -32 & -14 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{a } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = - \begin{bmatrix} -32 & -14 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{bmatrix}.$$

ZADACI

(1) Odrediti A^{-1} , ako postoji:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},$

$$(b) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Rešiti matrične jednačine:

$$(a) AX = B \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(b) AX - 2X = B \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$(c) X - 2XA = B \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \text{ Rešiti matričnu jednačinu } AX - B = X \text{ za } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \text{ Rešiti matričnu jednačinu } ABX = 4X + C \text{ za } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = A^T \text{ i } C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(5) \text{ Rešiti matričnu jednačinu } AXB = C \text{ za } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(6) \text{ Matričnim računom rešiti sistem linearnih jednačina } \begin{array}{rrcrcl} -x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ & x & - & y & - & z & = & -1 \\ & & & y & - & z & = & 0 \end{array}.$$

$$(7) \text{ Matričnim računom rešiti sistem linearnih jednačina } \begin{array}{rrcrcl} 5x & - & 3y & + & 2z & = & 17 \\ -x & & & + & 7z & = & 9 \\ x & + & 3y & & & = & 7 \end{array}.$$

$$(8) \text{ Matričnim računom rešiti sistem linearnih jednačina } \begin{array}{rrcrcl} -x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 7 \\ 2x & - & y & - & z & = & 3 \end{array}.$$

Podmatrica date matrice A formata $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$ je matrica dobijena izostavljanjem k vrsta i l kolona matrice A , gde $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, $l \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Neka je $\tilde{A}$ kvadratna podmatrica nenula matrice A , čija je determinanta različita od 0 i pri tome ima najveći red u odnosu na sve matrice sa tom osobinom. Tada je **rang** matrice A jednak redu podmatrice $\tilde{A}$. Specijalno, ako je A nula matrica, tada je njen rang jednak 0. Rang matrice A označava se sa $\text{rang}(A)$.

Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Za svaku nenula matricu A formata $m \times n$ postoji njoj ekvivalentna matrica B oblika

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n},$$

takva da je $b_{ii} \neq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $r \leq \min\{m, n\}$.

Kako je $\text{rang}(B) = r$, sledi da je i $\text{rang}(A) = r$.

Drugim rečima, ako su svi elementi matrice A ispod glavne dijagonale i r -te vrste jednaki nuli, a preostali elementi na glavnoj dijagonali različiti od nule, tada je rang matrice A jednak r .

$$\text{Primer: } A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{rang}(A) = 3.$$

ZADACI

(1) Odrediti rang matrica:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(f) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Odrediti rang matrica:

$$(a) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(b) B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & 12 \\ 6 & 5 & 13 \end{bmatrix},$$

$$(c) C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 10 & 13 & 5 & 21 & 16 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

ZA VEŽBU: IZ SKRIPTE

Zadatak 9.21 pod a, 9.23, 9.24