

GRUPE

Grupoid $(G, *)$ je **grupa** akko

(1) je operacija $*$ asocijativna, tj. ako je $(G, *)$ polugrupa (asocijativni grupoid),

(2) postoji levi neutralni element, tj.

$$\exists e \in G, \forall x \in G, e * x = x,$$

(3) za svaki element $x \in G$ postoji njemu levi inverzni element $x' \in G$, tj.

$$\forall x \in G, \exists x' \in G, x' * x = e.$$

Grupa u kojoj važi komutativni zakon zove se **komutativna** ili **Abelova grupa**.

U grupi uvek važi:

- levi neutralni element je istovremeno i desni neutralni element, pa je to onda neutralni element i on je jedinstven,
- levi inverzni elementi su istovremeno i desni inverzni elementi, pa su to inverzni elementi i oni su jedinstveni,
- zakon cancelacije, jer je svaka grupa asocijativna, ima neutralni i inverzne elemente.

Primer: Da li su sledeći uređeni parovi grupe?

$$(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Z}, \cdot), (\{-1, 0, 1\}, +), (\mathbb{I} \setminus \{0\}, \cdot).$$

Grupa $(A, \cdot)$ se naziva multiplikativna grupa i u njoj se neutralni elemenat označava sa 1 i čita “jedinica grupe”, a inverzni elemenat od x se označava sa x^{-1} .

Grupa $(A, +)$ se naziva aditivna grupa i u njoj se neutralni elemenat označava sa 0 i čita “nula grupe”, a inverzni od x se označava sa $-x$.

ZADACI

(1) Da li se date nepotpune Kejljeve tablice mogu dopuniti do tablica grupovnih operacija?

$$(a) \begin{array}{c|c|c|c} * & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ \hline a & & & \\ \hline b & & & a \end{array}, \quad (b) \begin{array}{c|c|c|c} * & e & a & b & c \\ \hline e & e & & & \\ \hline a & a & & & e \\ \hline b & b & & & \\ \hline c & c & & e & \end{array}.$$

(2) Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisana je operacija $*$ sa

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a * b = abk,$$

gde je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ data konstanta. Ispitati da li je $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ Abelova grupa.

(3) Na skupu $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0\}$ definisana je operacija $*$ sa

$$\forall (a, b), (c, d) \in G, (a, b) * (c, d) = (ad - d + c, bd).$$

Ispitati da li je $(G, *)$ grupa, i da li je komutativna.

(4) Date su funkcije $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$. Ispitati da li je $(\{f, g, h\}, \circ)$ Abelova grupa.

(5) Date su funkcije $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $h(x) = \frac{1}{x}$ i $u(x) = -\frac{1}{x}$. Ispitati da li je $(\{f, g, h, u\}, \circ)$ Abelova grupa.

Neka su $(H, *)$ i $(G, *)$ grupe. Tada je $\mathcal{H}$ **podgrupa** grupe $\mathcal{G}$ akko je $H \subseteq G$ i operacija $*$ iz $(H, *)$ je restrikcija operacije $*$ iz $(G, *)$.

Neutralni elemenat grupe je takođe neutralni elemenat i svake njene podgrupe.

Svaka grupa (osim one koja se sastoji samo od neutralnog elementa) ima bar dve podgrupe, takozvane trivijalne podgrupe:

- podgrupu koja se sastoji samo od neutralnog elementa i

- celu grupu koja je uvek sama sebi podgrupa.

Da bi $(H, *)$ bila podgrupa grupe $(G, *)$, gde je $\emptyset \neq H \subseteq G$, dovoljno je da operacija $*$ bude zatvorena u H , da neutralni element grupe $(G, *)$ pripada skupu H i da za svako $x \in H$ njegov inverzni elemenat u $(G, *)$ pripada skupu H .

Lagranžova teorema: Ako je $(G, *)$ konačna grupa i $(H, *)$ podgrupa grupe $(G, *)$, tada je broj svih elemenata grupe $(G, *)$ deljiv brojem svih elemenata podgrupe $(H, *)$.

Primer: Primeri podgrupa:

- $(\mathbb{R}, +)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{Q}, +)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{Z}, +)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- $((0, \infty), \cdot)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Primer: Grupoid $(G, \circ)$ kod kog je $G = \{e, a, b, c\}$, a operacija $\circ$ zadata tablicom

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

je Abelova grupa i naziva se Klajnova grupa. Klajnovu grupu karakteriše to da je svaki elemenat sam sebi inverzan.

Primer: Naći sve podgrupe Klajnove grupe.

- trivijalne: $(\{e\}, \circ)$, $(G, \circ)$

- netrivijalne: Kako na osnovu Lagranžove teoreme broj elemenata podgrupe mora da deli broj elemenata grupe, to Klajnova grupa može da ima samo podgrupe sa 1, 2 ili 4 elementa. Sa 1 i 4 elementa su trivijalne podgrupe, a sa 2 moraju sadržati neutralni elemenat pa su kandidati za netrivijalne podgrupe

$$(\{e, a\}, \circ) \quad (\{e, b\}, \circ) \quad (\{e, c\}, \circ)$$

$\circ$	e	a	$\circ$	e	b	$\circ$	e	c
e	e	a	e	e	b	e	e	c
a	a	e	b	b	e	c	c	e

Direktnom proverom iz tablica vidi se da ovo jesu grupe, pa Klajnova grupa osim trivijalnih ima i tri netrivijalne podgrupe.

Napomena: Kako izomorfizam prenosi osobine sa jednog na drugi grupoid to znači da ako su dva grupoida izomorfna i ako je jedan od njih grupa biće i drugi.

ZADACI

- (1) Ispitati da li je funkcija $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definisana se

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) = 3k,$$

homomorfizam grupa $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$. Da li je izomorfizam?

- (2) Ispitati da li je funkcija $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ definisana se

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) = (0, k),$$

homomorfizam grupa $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{Z}^2, +)$. Da li je izomorfizam?

ZA VEŽBU IZ SKRIPTA:

Zadatak 6.3 (bez c i g), 6.4, 6.6, 6.7, 6.10 (bez onog dela zadatka u kom se traži maksimalan podskup), 6.13