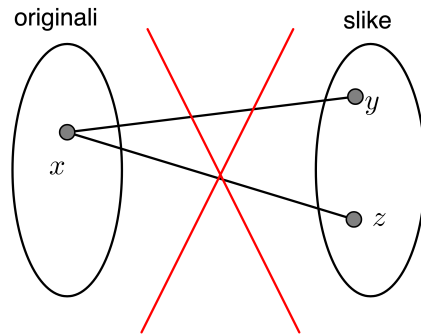


FUNKCIJE

Funkcija $f \subseteq A \times B$ je binarna relacija kod koje ne postoje dva različita uređena para sa jednakim prvim komponentama, tj. za koju važi

$$\forall x, y, z ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z).$$

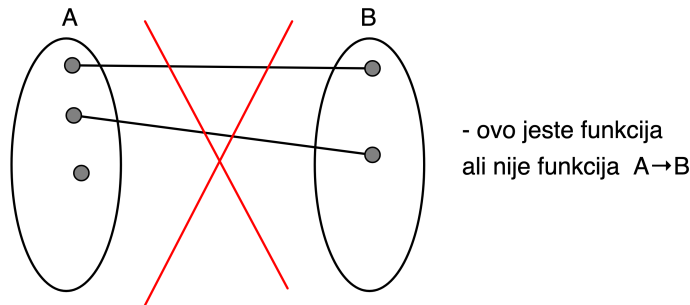


Uobičajeno je da se umesto $(x, y) \in f$ piše $y = f(x)$.

Domén (oblast definisanosti) funkcije f je $\mathcal{D}(f) = \{x \mid \exists y, (x, y) \in f\}$, tj. skup svih prvih komponenti parova iz f . Elementi domena se nazivaju originali.

Kodomén (skup vrednosti) funkcije f je $\mathcal{K}(f) = \{y \mid \exists x, (x, y) \in f\}$, tj. skup svih drugih komponenti parova iz f . Elementi kodomena se nazivaju slike.

Funkcija f iz skupa A u skup B , u oznaci $f : A \longrightarrow B$, je ona funkcija kod koje je $A = \mathcal{D}(f)$, a $\mathcal{K}(f) \subseteq B$, tj. ona funkcija kod koje je skup svih prvih komponenti tačno skup A , a skup svih drugih komponenti je podskup skupa B .



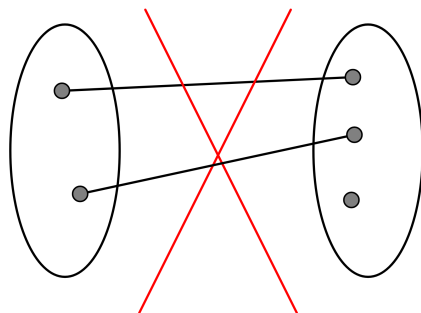
Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, b)\}$ jeste funkcija ali nije $f : A \longrightarrow B$ jer elemenat $3 \in A$ nema sliku;
- $f_3 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$ nije funkcija jer se elemenat $1 \in A$ preslika u dve slike, u a i u b . Čim nije funkcija ne može biti ni $f : A \longrightarrow B$.

Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **sirjektivna**, (**“na”**), što se označava sa $f : A \xrightarrow{\text{“na”}} B$, ako je $\mathcal{K}(f) = B$, tj. ako se svaki elemenat skupa B pojavljuje bar jednom kao druga komponenta u f .

Dakle,

$$f : A \xrightarrow{\text{“na”}} B \text{ ako } (\forall y \in B) (\exists x \in A) y = f(x).$$



- jeste funkcija $f: A \rightarrow B$,
ali nije "na"

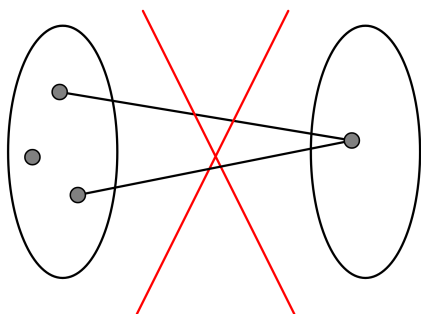
Napomena: Da bi se ispitivala surjektivnost funkcije nije dovoljno da funkcija bude samo funkcija, neophodno je da bude funkcija skupa A u skup B .

Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ jeste $f: A \xrightarrow{\text{"na"}} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ jeste $f: A \rightarrow B$, ali nije $f: A \xrightarrow{\text{"na"}} B$ jer se nijedan element skupa A ne preslika u element $b \in B$;
- $f_3 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste funkcija, ali nije $f: A \rightarrow B$, pa ne može biti ni $f: A \xrightarrow{\text{"na"}} B$.

Funkcija f je **injektivna** ("1-1") ako u f ne postoje dva različita uređena para sa jednakim drugim komponentama. Dakle,

f je injektivna funkcija ako $(\forall x, y \in \mathcal{D}(f)) (f(x) = f(y) \implies x = y)$.



- jeste funkcija,
ali nije "1-1"

Napomena: Da bi se ispitivala injektivnost funkcije dovoljno je da funkcija bude samo funkcija. Injektivnost se može ispitivati za bilo kakvu funkciju, a može i za funkciju skupa A u skup B .

Injektivna funkcija skupa A u skup B se označava se $f: A \xrightarrow{\text{"1-1"}} B$

Primer: Neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$ jeste $f: A \xrightarrow{\text{"1-1"}} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste $f: A \rightarrow B$, ali nije $f: A \xrightarrow{\text{"1-1"}} B$ jer se oba elementa skupa A preslikavaju u element $a \in B$;
- $f_3 = \{(1, a)\}$ jeste funkcija i jeste "1-1" iako nije $f: A \rightarrow B$.

Funkcija f je **bijektivna** ako je u isto vreme surjektivna i injektivna. Bijektivna može biti samo funkcija skupa A u skup B i tada se ona označava se $f: A \xrightarrow[\text{"na"}]{\text{"1-1"}} B$.

Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ jeste $f: A \xrightarrow[\text{"na"}]{\text{"1-1"}} B$;

- $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$. jer nije injektivna pošto se elementi 1 i 2 preslikavaju u isti element a ;
- $f_3 = \{(1, a)\}$ jeste funkcija ali nije bijekcija jer nije $f : A \longrightarrow B$.

Primer: Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{a, b, c\}$. Proveriti koje od sledećih relacija su funkcije skupa A u skup B , i ispitati surjektivnost i injektivnost.

$$f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (5, c)\};$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (5, c), (1, c)\};$$

$$f_3 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (5, a)\};$$

$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, c), (5, a)\};$$

$$f_5 = \{(1, a), (2, b), (4, c)\}.$$

ZADACI

- (1) Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ i relacije:

$$f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (1, d)\},$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, a)\},$$

$$f_3 = \{(1, d), (2, a), (3, c)\}.$$

Popuniti tablicu:

f_i	f_i je funkcija	$f_i : A \longrightarrow B$	f_i je "1-1"	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1						
f_2						
f_3						

Da li se može definisati surjektivna funkcija skupa A u skup B ?

- (2) Dati su skupovi $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2\}$ i relacije:

$$f_1 = \{(x, 1)\},$$

$$f_2 = \{(x, 1), (y, 1), (z, 1)\},$$

$$f_3 = \{(x, 1), (y, 1), (z, 2)\}.$$

$$f_4 = \{(x, 1), (y, 2), (x, 2)\}.$$

Popuniti tablicu:

f_i	f_i je funkcija	$f_i : A \longrightarrow B$	f_i je "1-1"	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						

Da li se može definisati injektivna funkcija skupa A u skup B ?

- (3) Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ i relacije:

$$f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\},$$

$$f_2 = \{(1, a)\},$$

$$f_3 = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}.$$

$$f_4 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}.$$

Popuniti tablicu:

f_i	f_i je funkcija	$f_i : A \longrightarrow B$	f_i je "1-1"	$f_i : A \xrightarrow{"1-1"} B$	$f_i : A \xrightarrow{"na"} B$	$f_i : A \xrightarrow{"1-1"}_{"na"} B$
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						

ZAKLJUČAK: Za dva konačna skupa A i B važi:

- $Card(A) = Card(B) \iff \exists f, f : A \xrightarrow{"1-1"}_{"na"} B;$
- $Card(A) \leq Card(B) \iff \exists f, f : A \xrightarrow{"1-1"} B;$
- $Card(A) \geq Card(B) \iff \exists f, f : A \xrightarrow{"na"} B.$

Identička funkcija $i_A : A \longrightarrow A$ je definisana sa $i_A(x) = x$.

Ako je inverzna relacija f^{-1} funkcije f takođe funkcija onda je f^{-1} **inverzna funkcija** funkcije f .

Napomena: Inverzna funkcija se definiše za bilo koju funkciju, ne mora biti funkcija skupa A u skup B .

Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, a $B = \{x, y, z\}$.

- Za funkciju $f_1 = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$ inverzna funkcija je $f^{-1} = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$.
- Funkcija $f_2 = \{(1, x), (2, x), (3, x)\}$ nema inverznu funkciju jer inverzna relacije ove funkcije nije funkcija.

Inverzna funkcija funkcije f postoji akko je funkcija f injektivna. Za funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoji inverzna funkcija $f^{-1} : B \longrightarrow A$ akko je funkcija f bijektivna.

Neka su A, B i C neprazni skupovi i neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ date funkcije. Funkcija $g \circ f : A \longrightarrow C$ definisana sa $(\forall x \in A) (g \circ f)(x) = g(f(x))$ zove se **kompozicija** funkcija f i g .

Kompozicija injektivnih funkcija je injektivna funkcija.

Kompozicija surjektivnih funkcija $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ je surjektivna funkcija.

Kompozicija bijektivnih funkcija je bijektivna funkcija.

Neka je funkcija $f : A \longrightarrow B$ bijektivna i neka je f^{-1} njena inverzna funkcija, tada je $(\forall x \in A) f^{-1}(f(x)) = x$.

Kompozicija funkcija koje preslikavaju skup A u samog sebe je asocijativna operacija.

Načini zadavanja funkcija: Neka je na primer $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \mathbb{N}$. Jedna ista funkcija $f : A \longrightarrow B$ može biti zadata na više načina:

- nabrojanjem elemenata $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$,
- opisno pomoću drugih poznatih relacija i/ili operacija $f = \{(x, x^2) \mid x \in A\}$, tj. $f(x) = x^2, x \in A$,
- $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$,
- grafički.

Relacija koja je zadata grafički je funkcija akko svaka prava paralelna sa y -osom seče dati graf u najviše jednoj tački.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je injektivna akko svaka prava paralelna sa x -osom ima najviše jedan presek sa grafikom funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je surjektivna akko svaka prava paralelna sa x -osom ima bar jedan presek sa grafikom funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je bijektivna akko svaka prava paralelna sa x -osom ima tačno jedan presek sa grafikom funkcije.

ZADACI

- (1) Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = x^3 + 1$ i $g(x) = 2x$, odrediti: $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g, f^{-1}$ i g^{-1} ako postoje.
- (2) Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 1 - 3x$ i $g(x) = \frac{x^2 - 1}{3}$, odrediti: $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g, f^{-1}$ i g^{-1} ako postoje.

- (3) Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$. Odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, f^{-1} i g^{-1} ako postoje.
- (4) Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Odrediti: f^{-1} , g^{-1} , $f \circ g$, $(f \circ g)^{-1}$, $g^{-1} \circ f^{-1}$, ako postoje.
- (5) Neka je A najveći podskup skupa $\mathbb{R}$, a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je dobro definisana funkcija $f : A \longrightarrow B$. Za date funkcije f odrediti skupove A i B i ispitati injektivnost, surjektivnost.
- (a) $f(x) = x^2 - x - 2$;
 - (b) $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$;
 - (c) $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$;
 - (d) $f(x) = \frac{1-x}{2x+5}$;
 - (e) $f(x) = \sqrt{2+x}$;
 - (f) $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$;
 - (g) $f(x) = \ln \frac{1}{1+x^2}$.

ZA VEŽBU IZ SKRIPTA:

Primer: 2.1

Zadatak: 2.2, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8