

DETERMINANTE

Determinanta reda n , $n \in \mathbb{N}$ je kvadratna šema koja se izračunava po određenim pravilima.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\longrightarrow$ vrste, $\downarrow$ kolone, $\searrow$ glavna dijagonala, $\nearrow$ sporedna dijagonala.

Horizontalni redovi u determinanti se zovu vrste, a vertikalni kolone.

Element a_{ij} je element koji se nalazi u i -toj vrsti i j -toj koloni.

Dve determinante su jednake ako imaju jednaku brojnu vrednost.

Brojna vrednost determinante reda jedan jednaka je njenom jedinom elementu, tj.

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Brojna vrednost determinante reda dva određuje se tako što se od proizvoda elemenata na glavnoj dijagonali oduzme proizvod elemenata na sporednoj dijagonali, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Brojna vrednost determinante reda tri može se odrediti na više načina. Jedan od njih je Sarusovo pravilo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Primer:

- $|-5| = -5$.
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$.
- $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -6 - (-7) = 1$.
- $\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^3 \end{vmatrix} = \alpha^3 - \alpha^3 = 0$.
- $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0$.
- $\begin{vmatrix} 1 & i & -2 \\ 3 & 0 & i \\ 4 & 2 & 2i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & i \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 2i + i \cdot i \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 \cdot (-2) - 2 \cdot i \cdot 1 - 2i \cdot 3 \cdot i = 0 - 4 - 12 - 0 - 2i + 6 = -10 - 2i$.

Minor M_{ij} elementa a_{ij} determinante D reda n , $n \in \mathbb{N}$ je determinanta reda $n - 1$ koja se dobija od D izostavljanjem i -te vrste i j -te kolone, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Kofaktor A_{ij} elementa a_{ij} je

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Primer: Za $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ je $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$ a $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 6$.

Svaka determinanta reda n , $n \in \mathbb{N}$ može se predstaviti kao zbir n determinanti reda $n - 1$ na sledeći način:

(1) razvojem po i -toj vrsti, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in};$$

(2) razvojem po j -toj koloni, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}.$$

Primer:

Razvoj determinante reda 3 po prvoj vrsti:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Razvoj determinante reda 3 po trećoj koloni:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{13} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Primer:

Vrednost determinante $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ izračunata

- razvijanjem po drugoj vrsti je

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & 10 \end{vmatrix} &= -5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -5 \cdot (30 - 0) - (-20 - 0) - 8 \cdot (-12 - 0) \\ &= -150 + 20 + 96 = -34. \end{aligned}$$

- razvijanjem po trećoj koloni je

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 8 \cdot (-12 - 0) + 10 \cdot (2 - 15) = 96 - 130 = -34.$$

Osobine determinanti

- (1) Vrednost determinante se ne menja ako sve vrste i kolone zamene mesta.
- (2) Ako elementi jedne vrste (kolone) zamene mesta sa elementima neke druge vrste (kolone) determinanta menja znak.
- (3) Determinanta se množi nekim brojem (skalarom) tako što se svi elementi samo jedne proizvoljne vrste (kolone) pomnože tim brojem.
- (4) Vrednost determinante je jednaka nuli ako su bilo koje dve njene vrste (kolone) jednake.
- (5) Vrednost determinante je jednaka nuli ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone).
- (6) Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste (kolone) prethodno pomnoženi nekim brojem.
- (7) Vrednost determinante čiji su svi elementi ispod (iznad) glavne dijagonale jednaki nuli, jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

Primer:

$$\bullet \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 12 = 144,$$

jer su elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0, pa se vrednost determinante izračunava kao proizvod dijagonalnih elemenata.

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 20 \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 0,$$

jer su prva i treća vrsta proporcionalne (elementi treće vrste su 5 puta veći od odgovarajućih elemenata prve vrste).

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2 - 5) = 4 \cdot (-3) = -12.$$

Prva vrsta je dodata trećoj vrsti i zatim je determinanta razvijanjem po trećoj vrsti.