

BINARNE OPERACIJE

Neka je $A \neq \emptyset$.

Unarna operacija skupa A je svaka funkcija $' : A \rightarrow A$. **Binarna operacija** skupa A je svaka funkcija $* : A^2 \rightarrow A$.

Uobičajeno je da se za unarne operacije koriste simboli: $-$, $^{-1}$, $'$ i slično, a za binarne: $+$, $\cdot$, $\oplus$, $\odot$, $*$ i slično.

Takođe se umesto $*(a, b)$ piše $a * b$, na primer, umesto $+(1, 2) = 3$ piše se $1 + 2 = 3$.

Ako je $*$ binarna operacija nepraznog skupa A uređen par $\mathcal{A} = (A, *)$ se naziva **grupoid**.

Uređen par $(A, *)$ je grupoid ako je $A \neq \emptyset$ i operacija $*$ zatvorena u skupu A , tj. važi $\forall x, y \in A \implies x * y \in A$.

Primer: Da li su sledeći uređeni parovi grupoidi?

$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, -)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, :)$, $(\mathbb{R}, :)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$, $(\{-1, 0, 1\}, +)$, $(\{-2, -1, 0, 1, 2\}, \cdot)$.

Binarne operacije se obično zadaju (definišu) korišćenjem:

- Kejljevih tablica.

Pomoću Kejljevih tablica se mogu zadati unarne i binarne operacije na konačnom skupu A . Na primer, neka je $A = \{0, 1, 2, 3\}$

'		*	0	1	2	3
0	0	0	0	1	2	3
1	3	1	1	2	3	3
2	2	2	2	3	3	3
3	1	3	3	3	3	3

- Poznatih binarnih operacija .

Pomoću poznatih operacija mogu se zadati nove unarne i binarne operacije. Na primer, na skupu $A = \{0, 1, 2, 3\}$ su sa

$$x' = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 4 - x, & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad x * y = \min\{x + y, 3\}$$

definisane iste operacije $'$ i $*$ koje su definisane Kejljevim tablicama datim iznad.

Osobine grupoida.

Neka je A neprazan skup.

- Grupoid $(A, *)$ je asocijativan (polugrupa) ako $\forall x, y, z \in A, x * (y * z) = (x * y) * z$.
- Grupoid $(A, *)$ je komutativan ako $\forall x, y \in A, x * y = y * x$.
- Grupoid $(A, *)$ je idempotentan ako $\forall x \in A, x * x = x$.
- Grupoid $(A, *)$ je sa levim neutralnim elementom ako $\exists e \in A, \forall x \in A, e * x = x$.

Grupoid $(A, *)$ je sa desnim neutralnim elementom ako $\exists e \in A, \forall x \in A, x * e = x$.

Element $e \in A$ je neutralni element grupoida $(A, *)$ ako je on istovremeno i levi i desni neutralni element.

- Neka je $e \in A$ levi neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki element $x \in A, \exists x' \in A, x' * x = e$ tada je x' levi inverzni element elementa x .

Neka je $e \in A$ desni neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki element $x \in A, \exists x' \in A, x * x' = e$ tada je x' desni inverzni element elementa x .

Neka je $e \in A$ neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki element $x \in A$ postoji element $x' \in A$ koji je istovremeno i levi i desni inverzni element elementa x , tada je element x' inverzni element, elementa x .

- Grupoid $(A, *)$ je kancelativan ako $\forall x, y, z \in A, x * y = x * z \implies y = z$ i $y * x = z * x \implies y = z$ (levi i desni zakon kancelacije).

- Grupoid $(A, *)$ je sa levim nilpotentnim elementom ako $\exists \mathbf{0} \in A, \forall x \in A, \mathbf{0} * x = \mathbf{0}$.

Grupoid $(A, *)$ je sa desnim nilpotentnim elementom ako $\exists \mathbf{0} \in A, \forall x \in A, x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Element $\mathbf{0} \in A$ je nilpotentni element grupoida $(A, *)$ ako je on istovremeno i levi i desni nilpotentni element.

Ako postoji neutralni element, on je jedinstven.

Ako postoji inverzni element, on je jedinstven.

Ako je grupoid komutativan, levi neutralni element mora biti i desni, levi inverzni element mora biti i desni, levi nilpotentni element mora biti i desni, tj. pri ispitivanju neutralnog, nilpotentnog i inverznih elemenata dovoljno je ispitivati samo leve, odnosno samo desne.

Ako u asocijativnom grupoidu postoji i neutralni element i inverzni elementi za sve elemente skupa on je kancelativan.

Ako je neka operacija zadata preko poznatih binarnih i unarnih operacija, tada se pri ispitivanju njenih osobina koriste poznate osobine operacija preko kojih je definisana.

ZADACI

- (1) Ispitati koji su od sledećih uređenih parova datih u tablici grupoidi i za one koji jesu ispitati komutativnost, asocijativnost, neutralni i inverzni element.

	$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{N}, \cdot)$	$(\mathbb{N}, -)$	$(\mathbb{Z}, -)$	$(\mathbb{Z}, \cdot)$	$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, :)$	$(\mathbb{R}, :)$	$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$	$(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$
grupoid									
asocijativnost									
komutativnost									
neutralni element									
inverzni elementi									

	$(\{-1, 0, 1\}, +)$	$(\{-2, -1, 0, 1, 2\}, \cdot)$	$(\{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$	$(\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$	$(\{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$
grupoid					
asocijativnost					
komutativnost					
neutralni element					
inverzni elementi					

	$(\{5k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$	$(\{-1, 1\}, \cdot)$	$(\{1, -1, i, -i\}, +)$	$(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$	$(\{f \mid f : A \longrightarrow A\}, \circ)$
grupoid					
asocijativnost					
komutativnost					
neutralni element					
inverzni elementi					

Neka je $\mathcal{A} = (A, *)$ grupoid, i neka je B neprazan podskup skupa A . Ukoliko je $\mathcal{B} = (B, *)$ grupoid, tj. ako je operacija $*$ zatvorena u skupu B , tada je $\mathcal{B}$ **podgrupoid** grupoida $\mathcal{A}$.

Operacija $*$ grupoida $\mathcal{B}$ je ustvari restrikcija operacije $*$ grupoida $\mathcal{A}$, ali je uobičajeno da se one isto označavaju.

Zakoničnosti u kojima od kvantifikatora figuriše samo $\forall$ (na primer komutativnost i asocijativnost) prenose se sa grupoida na svaki njegov podgrupoid.

Primer: Neka je $A = [0, 1]$ i $B = \{0, 1\}$. Ispitati da li su uređeni parovi $(A, \min)$ i $(B, \min)$ grupoidi i ako jesu ispitati njihove osobine.

$(A, \min)$ jeste grupoid jer:

- $A \neq \emptyset$;
- zatvorenost: važi jer za $\forall x, y \in A, \min(x, y) \in [x, y] \subseteq A$,

Za grupoid $(A, \min)$:

- asocijativnost: važi jer za $\forall x, y, z \in A, \min(x, \min(y, z)) = \min(x, y, z) = \min(\min(x, y), z)$;
- komutativnost: važi jer za $\forall x, y \in A, \min(x, y) = \min(y, x)$;
- idempotentnost: važi jer za $\forall x \in A, \min(x, x) = x$;

- neutralni elemenat: je 1 jer je za $\forall x \in A$, $\min(1, x) = x$;
- inverzni elementi: samo elemenat 1 ima inverzni i to je sam sebi inverzan, tj. važi $\min(1, 1) = 1$, ostali elementi nemaju inverzne;
- nilpotentni elemenat: je 0 jer je za $\forall x \in A$, $\min(0, x) = 0$;
- kancelativnost: ne važi jer je na primer $\min(0, 1) = \min(0, 0)$ a $0 \neq 1$.

Skup B je neprazan podskup skupa A , i on je zatvoren za operaciju $\min$ jer $\forall x, y \in B$, $\min(x, y) \in \{x, y\} \subseteq B$, pa je $(B, \min)$ grupoid, što znači da je $(B, \min)$ podgrupoid grupoida $(A, \min)$. Kako je operacija $\min$ u skupu B restrikcija operacije $\min$ u skupu A , i kako 1 i 0 pripadaju skupu B , u grupoidu $(B, \min)$ važe potpuno iste osobine kao i u grupoidu $(A, \min)$.

Primer: Ispitati da li su uređeni parovi $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$, $((0, 1], \cdot)$, $((0, 1), \cdot)$, $(\{0, 1\}, \cdot)$, $(A, \cdot)$ gde je $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ i $(\mathbb{I}, \cdot)$ grupoidi i ako jesu ispitati njihove osobine. Odrediti koji su grupoidi podgrupoidi nekih drugih ovde posmatranih grupoida.

Svi navedeni skupovi su neprazni.

$\cdot$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, \infty)$	$(0, 1]$	$(0, 1)$	$\{0, 1\}$	A	$\mathbb{I}$
grupoid	+	+	+	+	+	+	+	$-, \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{I}$
asocijativnost	+	+	+	+	+	+	+	/
komutativnost	+	+	+	+	+	+	+	/
idempotentnost	—	—	—	—	—	+	—	/
neutralni element	1	1	1	1	—	1	—	/
inverzni elementi	0 nema, ostali +	+	+	1 ima, ostali -	—	1 ima, 0 nema	—	/
nilpotentni element	0	—	—	—	—	0	—	/
kancelacija	—	+	+	+	+	—	+	/

Svaki od posmatranih grupoida je sam sebi podgrupoid i osim toga:

- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$;
- $((0, \infty), \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $((0, 1], \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $((0, \infty), \cdot)$;
- $((0, 1), \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$ i $((0, 1], \cdot)$;
- $(\{0, 1\}, \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$;
- $(A, \cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$, $((0, 1], \cdot)$ i $((0, 1), \cdot)$.

ZADACI

- (1) Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je operacija $*$ sa

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a * b = a + b + 3,$$

gde je $+$ operacija sabiranja. Ispitati algebarsku sturkturu $(\mathbb{R}, *)$.

- (2) Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisana je operacija $*$ sa

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a * b = \frac{ab}{13},$$

Ispitati algebarsku sturkturu $(\mathbb{R} \setminus \{-2\}, *)$.

- (3) Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ definisana je operacija $*$ sa

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, a * b = a \cdot b + 2a + 2b + 2,$$

gde je $+$ operacija sabiranja, a $\cdot$ operacija množenja. Ispitati algebarsku sturkturu $(\mathbb{R} \setminus \{-2\}, *)$.

Ako je operacija $*$ na nepraznom skupu A zadata Kejljevom tablicom, neke od osobina se mogu proveriti “vizuelno” uočavanjem određenog, specifičnog, rasporeda u tablici.

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa A ;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu;

- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni;
- neutralni elemenat: $e \in A$ je levi neutralni elemenat ako je vrsta elementa e jednaka graničnoj vrsti, a $e \in A$ je desni neutralni elemenat ako je kolona elementa e jednaka graničnoj koloni;
- inverzni elemenat: ako je e levi neutralni elemenat, tada postoji levi inverzni elemenat x' elementa x ukoliko se u koloni elementa x pojavljuje bar jednom neutralni elemenat e , a ako je e desni neutralni elemenat, tada postoji desni inverzni elemenat x' elementa x ukoliko se u koloni elementa x pojavljuje bar jednom neutralni elemenat e .
Svaki elemenat ima svoj inverzni akko se elemenat e pojavljuje tačno jednom u svakoj vrsti i koloni i simetrično je raspoređen odnosu na glavnu dijagonalu.
- nilpotentni element: element 0 je nilpotentni element ako su cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;
- asocijativnost i kancelacija se ne mogu ispitivati pomoću tablice.

Primer*: Neka je $A = \{a, b, c, d\}$, i neka je operacija $*$ skupa A zadata Kejljevom tablicom

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	d

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa $A \neq \emptyset$, pa $(A, *)$ jeste grupoid;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu pa grupoid $(A, *)$ jeste komutativan;
- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A baš onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni pa grupoid $(A, *)$ jeste idempotentan;
- neutralni elemenat: elemenat $c \in A$ je neutralni elemenat grupoida $(A, *)$ jer je njegova vrsta jednaka graničnoj vrsti, a njegova kolona jednaka graničnoj koloni;
- inverzni elemenat: osim elementa c koji je sam sebi inverzan ($c * c = c$) ostali elementi nemaju inverzne;
- nilpotentni elemenat: elemenat $b \in A$ je nilpotentni elemenat jer se cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;
- grupoid $(A, *)$ nije kancelativan jer je recimo $ba = bd$ a $a \neq d$ (što se vidi iz tablice ali se nije moglo zaključiti na osnovu nje);
- da bi se ispitala asocijativnost grupoida $(A, *)$ potrebno je proveriti jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ za sve $x, y, z \in A$, što bi bilo $4^3 = 64$ slučaja. Kako je c neutralni elemenat, ako bar jedna promenljiva (x, y ili z) ima vrednost c , jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ će biti zadovoljena jer c kao neutralni elemenat ne utiče na rezultat operacije. Sad ostaje da se proveri još $3^3 = 27$ slučajeva. Kako je b nilpotentni elemenat, ako bar jedna promenljiva (x, y ili z) ima vrednost b , jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ će biti zadovoljena jer će izrazi na levoj i desnoj strani jednakosti imati vrednost b . Ostaje da se proveri još $2^3 = 8$ slučajeva. Ovo se može proveriti direktno očitavanjem iz tablice

$$\begin{array}{ll}
 a * (a * a) = a = (a * a) * a, & a * (a * d) = b = (a * a) * d, \\
 a * (d * a) = b = (a * d) * a, & a * (d * d) = b = (a * d) * d, \\
 d * (a * a) = b = (d * a) * a, & d * (a * d) = b = (d * a) * d, \\
 d * (d * a) = b = (d * d) * a, & d * (d * d) = d = (d * d) * d,
 \end{array}$$

pa grupoid $(A, *)$ jeste asocijativan.

ZADACI

- (1) Ispitati koje osobine ima grupoid $(G, *)$ ako je $G = \{a, b, c\}$, a operacija $*$ je data tablicom

$*$	a	b	c
a	c	a	a
b	a	b	c
c	b	c	b

- (2) Ispitati koje osobine ima grupoid $(G, *)$ ako je $G = \{a, b, c, d\}$, a operacija $*$ je data tablicom

$*$	a	b	c	d
a	a	d	b	c
b	c	b	d	a
c	d	a	c	b
d	b	c	a	d

- (3) Ispitati koje osobine ima grupoid $(G, *)$, a zatim naći sve njegove podgrupoide ako je $G = \{a, b, c, d\}$, a operacija $*$ je data tablicom

$*$	a	b	c	d
a	b	a	a	a
b	b	b	d	c
c	c	b	d	d
d	d	b	d	d

- (4) Dat je grupoid $(\{1, 2, 3, 4\}, *)$ gde je operacija $*$ definisana sa

$$x * y = \min \{x, y\}.$$

- (a) Ispitati osobine datog grupoida.
(b) Naći sve podgrupoide datog grupoida.

- (5) Ispitati koje osobine ima grupoid $(\{1, 2, 3, 6\}, *)$ gde je operacija $*$ definisana sa

$$x * y = \begin{cases} 6, & x = y \\ NZD(x, y) & x \neq y \end{cases}.$$

Neka su $(G, *)$ i $(H, \circ)$ grupoidi kod kojih je $G = \{a, b\}$ i $H = \{A, B\}$, a operacije $*$ i $\circ$ su definisane sledećim Kejljevim tablicama

$*$	a	b	$\circ$	A	B
a	a	b	A	A	B
b	b	a	B	B	A

Može se uočiti da se grupoidi $(G, *)$ i $(H, \circ)$ razlikuju samo po simbolu operacije i po “veličini slova”, tj. može se reći da je grupoid $(H, \circ)$ dobijen od grupoida $(G, *)$ tako što su u grupoidu $(G, *)$ preoznačeni elementi i operacija. Pri tome je struktura preoznačenog grupoida $(H, \circ)$ ostala ista kao i struktura polaznog grupoida $(G, *)$. U ovom slučaju kaže se da su ta dva grupoida ista (jednaka) do na izomorfizam, što se definiše na sledeći način.

Neka su $\mathcal{G} = (G, *)$ i $\mathcal{H} = (H, \circ)$ grupoidi, i neka je $h : G \longrightarrow H$. Funkcija h je **homomorfizam** grupoida $\mathcal{G}$ u grupoid $\mathcal{H}$ ako

$$\forall x, y \in G, h(x * y) = h(x) \circ h(y).$$

Ako je homomorfizam h bijektivna funkcija tada se funkcija h naziva **izomorfizam**, i kaže se da je grupoid $\mathcal{G}$ izomorfan sa grupoidom $\mathcal{H}$, što se zapisuje sa $\mathcal{G} \simeq \mathcal{H}$.

Primer: Funkcija $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ je izomorfizam grupoida $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ u $(\mathbb{R}, +)$ jer je funkcija $\ln$ bijekcija i važi

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

Izomorfizam “prenosi” osobine sa jednog grupoida na drugi. Ako je $h : G \longrightarrow H$ izomorfizam grupoida $\mathcal{G} = (G, *)$ u grupoid $\mathcal{H} = (H, \circ)$, tada svaka “zakonitost” koja važi u $\mathcal{G}$ važi i u $\mathcal{H}$, tj.

- ako je grupoid $\mathcal{G}$ asocijativan tada je i grupoid $\mathcal{H}$ asocijativan;
- ako je grupoid $\mathcal{G}$ komutativan tada je i grupoid $\mathcal{H}$ komutativan;
- ako postoji neutralni element $e_1 \in G$ u grupoidu $\mathcal{G}$ tada je $e_2 = h(e_1) \in H$ neutralni element grupoida $\mathcal{H}$;
- ako su $x \in G$ i $y \in G$ međusobno inverzni elementi u grupoidu $\mathcal{G}$ tada su $h(x) \in H$ i $h(y) \in H$ međusobno inverzni elementi u grupoidu $\mathcal{H}$.

Kako izomorfizam “prenosi” sve osobine iz jednog grupoida u drugi najčešće se koristi na sledeći način: Ako je potrebno ispitati osobine grupoida $(H, \circ)$, dovoljno je pronaći izomorfizam između njega i nekog grupoida čije osobine su već poznate pa će zbog izomorfizma one važiti i u $(H, \circ)$.

Ako su grupoidi $\mathcal{G} = (G, *)$ i $\mathcal{H} = (H, \circ)$ definisani Kejljevima tablicama i ako je $h : G \rightarrow H$ izomorfizam grupoida $\mathcal{G}$ u grupoid $\mathcal{H}$ tada, ako se u tablici grupoida $\mathcal{G}$ svaki elemenat $x \in G$ zameni elementom $h(x) \in H$ dobija se tablica grupoida $\mathcal{H}$, a važi i obrnuto, ako je $h : G \rightarrow H$ bijekcija i ako se tablica grupoida $\mathcal{H}$ može dobiti tako što se u tablici grupoida $\mathcal{G}$ svaki elemenat $x \in G$ zameni elementom $h(x) \in H$ onda je h izomorfizam.

Primer: Neka je $B = \{1, 2, 3, 6\}$ i na skupu B neka je data operacija “najmanji zajednički sadržalac” ($NZS(x, y)$ je najmanji elemenat skupa B koji je deljiv i sa x i sa y).

Na osnovu Kejljeve tablice

NZS	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

može se zaključiti

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa $B \neq \emptyset$, pa (B, NZS) jeste grupoid;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu pa grupoid (B, NZS) jeste komutativan;
- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A baš onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni pa grupoid (B, NZS) jeste idempotentan;
- neutralni elemenat: elemenat $1 \in B$ je neutralni elemenat grupoida (B, NZS) jer je njegova vrsta jednaka graničnoj vrsti, a njegova kolona jednaka graničnoj koloni;
- inverzni elemenat: osim elementa 1 koji je sam sebi inverzan ($1 * 1 = 1$) ostali elementi nemaju inverzne;
- nilpotentni elemenat: elemenat $6 \in B$ je nilpotentni elemenat jer se cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;
- grupoid $(B, *)$ nije kancelativan jer je recimo $NZS(6, 1) = NZS(6, 2)$ a $1 \neq 2$;
- asocijativnost je ovde veoma teško pokazati i zbog toga će biti iskorišćen izomorfizam. Ako se pogleda Primer* može se uočiti da se do sad ispitane osobine grupoida (B, NZS) poklapaju sa osobinama grupoida $(A, *)$ iz Primera*. Funkcija $f : A \rightarrow B$ data sa

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

je očigledno bijekcija.

Kada se u tablici

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	d

zameni svako pojavljivanje slova a brojem 3, slova b brojem 6, slova c brojem 1 i slova d brojem 2 dobija se

$*$	3	6	1	2
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6
1	3	6	1	2
2	6	6	2	2

Kada se zatim preslažu kolone i vrste dobija se baš

NZS	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

što znači da je funkcija f izomorfizam grupoida $(A, *)$ u grupoid (B, NZS) .

Kako je u Primeru* dokazano da je $(A, *)$ asocijativan grupoid zbog ovog izomorfizma sledi da je i grupoid (B, NZS) asocijativan. Sve ostale osobine grupoida (B, NZS) takođe slede iz izomorfizma i nisu morale biti posebno ispitivane.

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:

Zadatak 4.1, 4.3, 4.4 (težak), 6.1 (bez h), 6.2 (bez f)

Primer 4.1