

SLOBODNI VEKTORI

Duž AB je skup tačaka koji čine tačke A i B i sve tačke koje se nalaze između tih tačaka na pravoj određenoj sa A i B . Duž čiji se krajevi poklapaju naziva se nulta duž.

Orijentisana duž je duž kod koje je određeno šta je njena početna a šta krajnja tačka. Orijentacija nulte duži se ne definiše

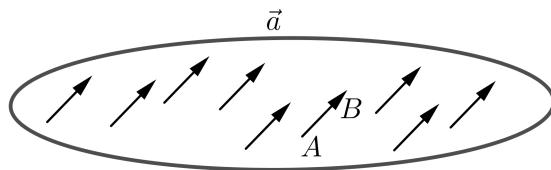
Slobodni nenula vektor je skup svih orijentisanih duži koje su međusobno podudarne, paralelne i isto orijentisane. Svaka od tih orijentisanih duži jeste jedan predstavnik tog slobodnog vektora i zove se **vektor**.

Slobodni nula vektor je skup svih nultih duži.

Slobodni vektori se obeležavaju sa $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

Vektor čija je početna tačka A , a krajnja B obeležava se sa $\overrightarrow{AB}$.

Kako je svaki slobodni vektor jednoznačno određen sa bilo kojim svojim predstavnikom, tj. vektorom, uobičajeno je da se poistovete pojam slobodnog vektora i vektora i piše se $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



Svaki vektor $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je određen svojim pravcem, smerom i intenzitetom.

Pravac vektora $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je određen pravom na kojoj leži taj vektor.

Intenzitet vektora $\overrightarrow{AB}$ je dužina duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$.

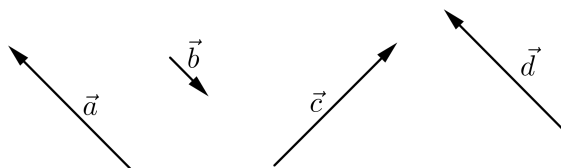
Smer vektora $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je od tačke A do tačke B .

Vektor čiji je intenzitet jednak jedan naziva se **jedinični vektor**.

Ako se $A \equiv B$, onda je $\overrightarrow{AB}$ nula vektor, u oznaci $\vec{0}$ ili samo 0 . Intenzitet nula vektora je 0 , a pravac i smer se ne definišu.

Nenula vektori su jednaki ako su im jednaki pravac, smer i intenzitet.

Primer:



Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti pravac, a suprotan smer. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{d}$ imaju isti pravac, smer i intenzitet, tj. $\vec{a} = \vec{d}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ imaju isti intenzitet, ali različit pravac.

SABIRANJE VEKTORA

Za bilo koje tri tačke važi:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

PROIZVOD VEKTORA I SKALARA

Množenjem vektora $\vec{a} \neq 0$ i skalara $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dobija se vektor $\alpha\vec{a}$ čiji je:

- (1) pravac isti kao pravac vektora $\vec{a}$,
 - (2) intezitet $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$,
 - (3) smer isti kao smer vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotan ako je $\alpha < 0$.
- Ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = 0$, onda je $\alpha\vec{a} = 0$.

Suprotan vektor vektoru $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je vektor $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Suprotni vektori imaju isti pravac i intenzitet, a suprotan smer.

Jedinični vektor koji odgovara vektoru $\vec{a}$, dobija se kada se vektor $\vec{a}$ pomnoži sa recipročnom vrednošću svog intenziteta, tj. jedinični vektor koji odgovara vektoru $\vec{a}$ je vektor $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Za vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važe sledeće osobine:

- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

Dakle, $(V, +)$, gde je V skup svih slobodnih vektora, je Abelova grupa.

- $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$,
- $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
- $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Za dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da su **kolinearni** akko imaju isti pravac, odnosno ako pripadaju istoj pravoj ili dvema paralelnim pravama.

Za kolinearne nenula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ postoji realni broj α različit od nule tako da je $\vec{a} = \alpha\vec{b}$.

Za dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da su **ortogonalni** (normalni) akko je ugao između njih prav.

Nula vektor je po definiciji kolinearan sa svakim vektorom i normalan je na svaki vektor.

Za tri nenula vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kaže se da su **komplanarni** akko su paralelni sa jednom ravni.

Nula vektor je po definiciji komplanaran sa svakim skupom komplanarnih vektora.

Ugao između vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ je ugao $\sphericalangle AOB$, O je koordinatni početak, pri čemu se dogovorno uzima da je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$.

SKALARNI PROIZVOD VEKTORA

Skalarni proizvod nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$, je skalar (broj) definisan sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Kada je $\vec{a} = 0$ ili $\vec{b} = 0$, tada je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Osobine skalarnog proizvoda:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$,
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,
- $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b})$,

VEKTORSKI PROIZVOD

Vektorski proizvod nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$, je vektor čiji je:

- (1) pravac normalan na pravce vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ i $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$.

(2) intezitet $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,

(3) smer takav da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ tim redom čine desni triedar.

Kada je $\vec{a} = 0$ ili $\vec{b} = 0$, tada je $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Osobine vektorskog proizvoda:

- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$,
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
- $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$,
- $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$,
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
- Intenzitet vektorskog proizvoda dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak je površini paralelograma konstruisanog nad tim vektorima, tj. $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

MEŠOVITI PROIZVOD

Mešoviti proizvod nenula vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, u oznaci $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ je skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b} \times \vec{c}$.

Osobine mešovitog proizvoda:

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$,
- Nenula vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni akko je njihov mešoviti proizvod jednak nuli, tj. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
- Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, jednaka je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad tim vektorima, tj. $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$.

ZADACI

- (1) Neka su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ takvi da je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Izračunati: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ i $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.
- (2) Naći intenzitet vektora $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, ako je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.
- (3) Odrediti realan parametar α tako da vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ budu uzajamno normalni, ako je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.
- (4) Koji ugao obrazuju jedinični vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako su vektori $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ i $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ uzajamno normalni?
- (5) Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{p} = 2\vec{b} - \vec{a}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ako je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.
- (6) Za koje vrednosti realnog parametra k će vektori $\vec{p} = k\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ biti kolinearni ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni?
- (7) Izračunati površinu trougla određenog vektorima $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, gde je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$ i $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

VEKTORI U KOORDINATNOM SISTEMU

Dekartov (pravougli) koordinatni sistem u prostoru je određen:

- ako su date tri prave koje se obično nazivaju x , y i z i svake dve se seku pod pravim uglom u tački $O(0, 0, 0)$;
- na svakoj od datih pravih izabran je jedan smer i nazvan pozitivan;
- na pozitivnim smerovima pravih x , y i z su izabrane tačke $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$ i $E_3(0, 0, 1)$ redom i uvedene oznake $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$ i $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$.

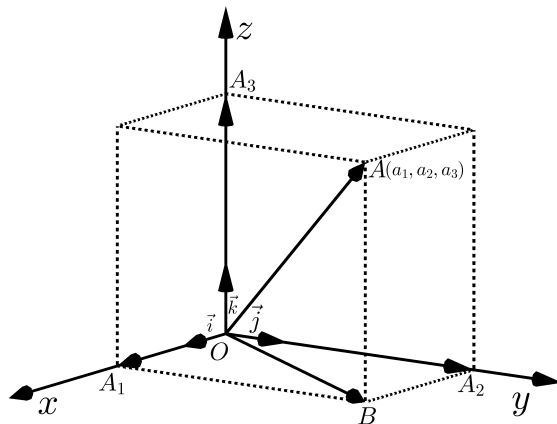
Prava x se naziva x -osa ili apscisa.

Prava y se naziva y -osa ili ordinata.

Prava z se naziva z -osa ili aplikata.

Tačka O se naziva koordinatni početak.

Vektori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sa koordinatnim početkom O , čine desni sistem vektora ili desni triedar, što znači da rotacija vektora $\vec{i}$, ka vektoru $\vec{j}$, oko tačke O , u ravni određenoj vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ima najkraći put u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, gledano sa krajnje tačke vektora $\vec{k}$.



Svakoj tački $A(a_1, a_2, a_3)$ u prostoru odgovara vektor $\overrightarrow{OA}$ čija je početna tačka u koordinatnom početku O , a krajnja u tački $A(a_1, a_2, a_3)$ i koji se naziva **vektor položaja tačke A**.

Vektor $\overrightarrow{OA}$ može se razložiti kao zbir tri vektora (slika iznad):

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3},$$

gde je tačka $B(a_1, a_2, 0)$, a tačke A_1 , A_2 i A_3 su projekcije tačke A na x -osu, y -osu i z -osu, redom,

tj. $A_1 = (a_1, 0, 0)$, $A_2 = (0, a_2, 0)$ i $A_3 = (0, 0, a_3)$.

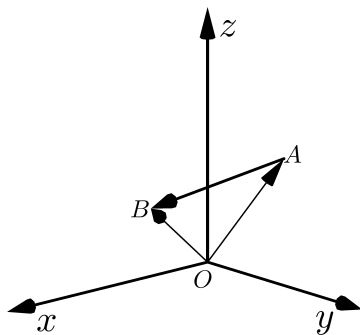
Kako je $\overrightarrow{OA_1} = a_1\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\vec{j}$ i $\overrightarrow{OA_3} = a_3\vec{k}$, sledi da je

$$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Umesto $\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ kraće se piše $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$.

Neka su $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$ dve tačke u prostoru čiji su vektori položaja $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$, redom. Tada je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$



Neka je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada:

- $\vec{a} = \vec{b}$ akko je $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ i $a_3 = b_3$,

- $\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3),$
- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$
-

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k},$$

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$

ZADACI

- (1) Za vektore $\vec{a} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$ izračunati: $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $3\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.
- (2) Dati su vektori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$ i $\vec{c} = (1, -1, 0)$. Naći vektor $\vec{x}$ tako da važi $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$ i $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$.
- (3) Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{q} = \vec{i} - 4\vec{j}$.
- (4) Izračunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{k}$ i $\vec{c} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.
- (5) Odrediti realan parametar α tako da vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ i $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 4\vec{j}$ budu ortogonalni.
- (6) Dati su vektori $\vec{a} = (2k - 1, 2, k + 2)$, $\vec{b} = (3, k - 1, -1)$ i $\vec{c} = (p, 1, 3)$, gde su $k \in \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{R}^-$.
 - (a) Odrediti vrednost parametara k i p tako da važi $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $|\vec{c}| = \sqrt{26}$.
 - (b) Za tako određene k i p pokazati da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

ZA VEŽBU: IZ SKRIPTE

Zadatak 10.12, 10.20, 10.21

Primer: 10.1