

Sistemi linearnih jednačina

October 31, 2025

Sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih je

$$S: \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

gde je $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uređena n -torka nepoznatih, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ su koeficijenti, a $b_i \in \mathbb{R}$ slobodni članovi, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ako je broj jednačina u sistemu jednak broju nepoznatih (tj. $m = n$) tada se sistem zove **kvadratni** sistem.

Ako su u sistemu svi slobodni članovi jednaki nuli (tj. ako je $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$,) onda se sistem naziva **homogen** sistem.

Skup rešenja sistema S , u oznaci R_S , čine sve uređene n -torke brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ koje zadovoljavaju svaku jednačinu sistema.

U zavisnosti od broja rešenja sistema, tj. prirode sistema, sistem može biti:

1. ODREĐEN - ima tačno jedno rešenje;
2. NEODREĐEN - ima više od jednog rešenja;
3. NEMOGUĆ (kontradiktoran, protivrečan)- nema rešenja.

$$\begin{array}{r} x+y=1 \\ y=0 \\ \hline y=0, x=1 \\ R_s = \{(1,0)\} \end{array}$$

Ako sistem ima bar jedno rešenje kaže se da je saglasan.

Homogen sistem sa $n \in \mathbb{N}$ promenljivih je uvek saglasan jer uvek ima bar jedno (trivijalno) rešenje $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Dakle, homogen sistem nikad nije nemoguć.

$$\begin{array}{r} x+y=0 \\ 2x+5y=0 \\ \hline (0,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+y=1 \\ x+y=-2 \\ \hline \text{⚡} R_s = \emptyset \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \quad | :2 \\ \hline x+y=1 \\ x=1-y \\ y=t, t \in \mathbb{R} \\ x=1-t \\ R_s = \{(1-t, t) | t \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Primer:

$$\text{a) } \begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 = 3 \\ x_1 & + & 2x_2 = 4 \end{array} ,$$

ovaj sistem je nemoguć, tj. nema rešenja. $R_S = \emptyset$.

$$\text{b) } \begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 = 4 \\ & & x_2 = 3 \end{array} ,$$

ovaj sistem je određen. $R_S = \{(1, 3)\}$.

$$\text{c) } \begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 = 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 = 6 \end{array} ,$$

ovaj sistem je neodređen, ima beskonačno mnogo rešenja.

$$R_S = \{(t, 2 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Dva sistema jednačina su ekvivalentna ako i samo ako su im jednaki skupovi rešenja.

Primenom elementarnih transformacija na sistem linearnih jednačina dobija se sistem ekvivalentan polaznom sistemu.

Elementarne transformacije sistema linearnih jednačina su:

- ▶ zamena mesta jednačinama;
- ▶ množenje jednačine skalarom različitim od nule;
- ▶ množenje jednačine skalarom i dodavanje nekoj drugoj jednačini;
- ▶ promena mesta sabircima u jednačinama (iste nepoznate pišu se jedna ispod druge odnosno u istoj koloni).

Postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina

Gausov postupak (Gausov algoritam, Gausova metoda eliminacije)

Može se primeniti za izračunavanje proizvoljnog sistema jednačina.

Sastoji se u tome da se pomoću navedenih elementarnih transformacija koje očuvavaju ekvivalentnost sistema, dobije trougaoni oblik iz kojeg se lako izračunavaju nepoznate.

Primer: Gausovim postupkom, rešiti sistem linearnih jednačina

$$\text{a) } \begin{array}{rcl} x & + & 2y = 5 \\ 3x & - & 4y = -5 \end{array} .$$

Množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem drugoj jednačini dobija se

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2y = 5 \\ \boxed{3x} & - & 4y = -5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x & + & 2y = 5 \\ - & 10y & = -20 \end{array} .$$

(Handwritten red annotations: a box around 3x, a bracket with -3 indicating multiplication of the first equation, and an upward arrow pointing to the second equation.)

Iz druge jednačine sledi da je $y = 2$. Uvrštavanjem te vrednosti u prvu jednačinu dobija se $x = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s = \{(1, 2)\}$. ✓

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ \text{b) } 2x & + & 3y & - & 2z & = & 2, \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array}$$

Množenjem prve jednačine sa -2 i dodavanjem drugoj jednačini, a potom množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem trećoj jednačini dobija se

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ -2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2x \\ 3x \end{array} \right. & + & 3y & - & 2z & = & 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \\ -4y \end{array} \right. & + & y & + & z & = & 6 \\ -3 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2x \\ 3x \end{array} \right. & - & y & & & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & -4y & - & 3z & = & -17 \end{array}$$

Množenjem druge jednačine sa 4 i dodavanjem trećoj jednačini, dobija se

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & & & - & 19z & = & -57 \end{array}$$

Dobijen je trougaoni oblik iz kojeg se iščitavaju rešenja. Iz treće jednačine sledi da je $z = 3$. Zamenom u drugu jednačinu dobija se $y = -10 + 4 \cdot 3 = 2$, a zamenom u prvu $x = 6 - 2 - 3 = 1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s = \{(1, 2, 3)\}$.

1. Rešiti sledeće sisteme linearnih jednačina:

1.1
$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 7 \\ 4x & - & 3y = 2 \end{array} ; \begin{array}{l} \rightarrow -4 \\ \leftarrow -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 7 \\ -4x - 3y & = & -26 \end{array} \quad \uparrow$$

$$y = \frac{-26}{-7} = \frac{26}{7}$$

$$x + \frac{26}{7} = 7$$

$$x = 7 - \frac{26}{7}$$

$$x = \frac{23}{7}$$

$$R_S = \left\{ \left(\frac{23}{7}, \frac{26}{7} \right) \right\}$$

$$R_S = \left\{ \left(\frac{23}{7}, \frac{26}{7} \right) \right\}$$

$$1.2 \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ x - y & = & 1 \end{array} \quad \downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ -2y & = & -4 \end{array} \quad \uparrow$$

$$y = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

$$S = \{(3, 2)\}$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$y = 2$$

$$\begin{array}{rcl} y + x & = & 5 \\ -y + x & = & 1 \end{array} \quad \downarrow +$$

$$\begin{array}{rcl} y + x & = & 5 \\ 2x & = & 6 \end{array} \quad \uparrow$$

$$x = 3$$

$$y = 2$$

1.3 $\begin{array}{rcl} x & + & y = 2 \\ \textcircled{3x} & + & 3y = 11 \end{array} ; \textcircled{2} - 3$

$$x + y = 2$$

$$0 = 5$$

⚡

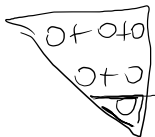
НЕМОЖУЩЕ

$R_S = \emptyset$

$$\begin{array}{rcl} 2x - 5y & = & 1 \\ 4x - 10y & = & 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -2$$

$$2x - 5y = 1$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$



$$2x - 5y = 1$$

$$2x = 1 + 5y$$

1x NEODREBEN

$$y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$2x = 1 + 5t$$

$$x = \frac{1+5t}{2}$$

$$R_S = \left\{ \left(\frac{1+5t}{2}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0 \right), (3, 1), \left(\frac{11}{2}, 2 \right), (-2, -1), \dots \right\}$$

$$-5y = 1 - 2x$$

1x NEODREBEN

$$x = w, \quad w \in \mathbb{R}$$

$$-5y = 1 - 2w$$

$$y = \frac{1-2w}{-5}$$

$$R_S = \left\{ \left(w, \frac{1-2w}{-5} \right) \mid w \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0 \right), (3, 1), \left(\frac{11}{2}, 2 \right), (-2, -1), \dots \right\}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 3y - 5z & = & 6 \\ 2x & + & z = 3 \\ 3x + 3y - 4z & = & 9 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{-2} \\ \xleftarrow{-3} \end{array}$$

$$x + 3y - 5z = 6$$

$$\begin{array}{r} -6y + 11z = -9 \\ -6y + 11z = -9 \end{array} \xrightarrow{-1}$$

$$\begin{array}{r} x + 3y - 5z = 6 \\ -6y + 11z = -9 \end{array}$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r} x + 3y = 6 + 5z \\ -6y = -9 - 11z \end{array}$$

1x NEODRUCKEN

$$z = t, t \in \mathbb{R}$$

$$-6y = -9 - 11t$$

$$y = \frac{9 + 11t}{6}$$

$$x + 3 \cdot \frac{9 + 11t}{6} = 6 + 5t$$

$$x = 6 + 5t - \frac{9 + 11t}{2}$$

$$x = \frac{3 - t}{2}$$

$$R_S = \left\{ \left(\frac{3-t}{2}, \frac{9+11t}{6}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{array}{r} x + 3y - 5z = 6 \\ 2x + z = 3 \\ 2x + z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3y + x - 5z = 6 \\ 2x + z = 3 \end{array} \xrightarrow{-1}$$

$$3y + x - 5z = 6$$

$$\begin{array}{r} 2x + z = 3 \\ 2x + z = 3 \end{array} \xrightarrow{-1}$$

$$\begin{array}{r} 3y + x - 5z = 6 \\ 2x + z = 3 \end{array}$$

$$0 = 0$$

$$\begin{array}{r} 3y + x = 6 + 5z \\ 2x = 3 - z \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3x & + & 3y - 5z = 6 \\ 1.6 & 2x & + 2y + \boxed{z} = 3 \quad ; -1 \\ 3x & + & 3y - 4z = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 3y - 5z = 6 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} z = 3 \\ 3x + 3y = 21 \quad / :3 \\ 2x + 2y = 0 \quad / :2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + y = 7 \\ x + y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 3y - 5z = 6 \\ 3x + 3y - 4z = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} z + 2x + 2y = 3 \\ -5z + 3x + 3y = 6 \\ -4z + 3x + 3y = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} z + 2x + 2y = 3 \\ 13x + 13y = 21 \quad / :13 \\ 11x + 11y = 21 \quad / :11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} z + 2x + 2y = 3 \\ x + y = \frac{21}{13} \\ x + y = \frac{21}{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} z + 2x + 2y = 3 \\ x + y = \frac{21}{13} \end{array}$$

$$0 = \frac{21}{11} - \frac{21}{13}$$



NEHOSUC

$$R_S = \emptyset$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x & - & y & + & 2z & = & 1 \\
 1.7 & 3x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\
 & -x & + & 2y & + & 2z & = & 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \downarrow -3 \\
 \leftarrow +
 \end{array}$$

$$x - y + 2z = 1$$

$$-y - 4z = -3$$

$$y + 4z = 2 \quad \downarrow +$$

$$x - y + 2z = 1$$

$$-y - 4z = -3$$

$$0 = -1$$



$$R_S = \emptyset$$



$$\begin{array}{rrcrcl} -x & - & y & - & 3z & = & 1 \\ 1.8 & 4x & + & 4y & + & 12z & = & -4 \\ 3x & + & 3y & + & 9z & = & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow^4 \\ \swarrow 3 \end{array}$$

$$-x - y - 3z = 1$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$-x - y - 3z = 1$$

$$-x = 1 + y + 3z$$

2x NEODREIBEN

$$y = t, t \in \mathbb{R}$$

$$z = m, m \in \mathbb{R}$$

$$-x = 1 + t + 3m$$

$$x = -1 - t - 3m$$

$$R_S = \{ (-1 - t - 3m, t, m) \mid t, m \in \mathbb{R} \}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x & + & y = 6 \\
 2x & + & y = 9 \\
 4x & + & 2y = 18
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \downarrow -2 \\
 \searrow -4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x + y & = & 6 \\
 -y & = & -3 \\
 -2y & = & -6
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \searrow -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x + y & = & 6 \\
 -y & = & -3 \\
 \hline
 0 & = & 0 \quad \checkmark
 \end{array}$$

$$y = 3$$

$$x = 3$$

$$R_s = \{(3, 3)\}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x + y & = & 6 \\
 2x + y & = & 9 \\
 4x + 2y & = & 16
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \downarrow -2 \\
 \searrow -4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x + y & = & 6 \\
 -y & = & -3 \\
 -2y & = & -6
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \searrow -2
 \end{array}
 \Rightarrow \begin{array}{l} y = 3 \\ x = 3 \end{array}$$

~~$R_s = \{(3, 3)\}$~~

$$\begin{array}{rcl}
 x + y & = & 6 \\
 -y & = & -3 \\
 \hline
 0 & = & -2
 \end{array}$$

~~1~~

$$1.10 \quad \begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array} ; \textcircled{2} - 3$$

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 5 \\ -4y - z & = & -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + z & = & 5 - y \\ -z & = & -14 + 4y \end{array} \uparrow$$

1x NEODDREIEN

$$y = t, t \in \mathbb{R}$$

$$-z = -14 + 4t$$

$$z = 14 - 4t$$

$$x + 14 - 4t = 5 - t$$

$$x = -9 + 3t$$

$$\mathcal{L}_5 = \{(-9 + 3t, t, 14 - 4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 x & + & y & + & 2z & + & 2u & = & 5 \\
 2x & + & y & - & z & - & u & = & 0 \\
 3x & + & 2y & + & z & + & u & = & 5 \\
 -x & - & y & + & 2z & + & u & = & 3
 \end{array} ;$$

$$\begin{array}{rclclclclclclclclclcl}
 2x & - & y & + & 3z & - & 2u & + & 4v & = & -1 \\
 1.12 & 4x & - & 2y & + & 5z & + & u & + & 7v & = & 2 & . \\
 & 2x & - & y & + & z & + & 8u & + & 2v & = & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
 2x & - & y & + & 3z & - & 2u & + & 4v & = & -1 \\
 1.13 & 4x & - & 2y & + & 5z & + & u & + & 7v & = & 2 \ . \\
 & 2x & - & y & + & z & + & 8u & + & 2v & = & 7
 \end{array}$$