Relacije

September 15, 2024

$\{a,b\} = \{b,a\}$

$(a,b) = (b,a) \Leftrightarrow a=b$

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

(a,b,c)

(a,b,c,d)

$(a_1,a_2,\dots,a_n)$

$\mathbb{R}^2 \quad \mathbb{Z}^2$

$A \qquad B$

$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$

$A=\{1,2\}$

$B=\{0,\triangle,\square\}$

$A\times B = \{(1,0),(1,\triangle),(1,\square),(2,0),(2,\triangle),(2,\square)\}$

$B\times A = \{(0,1),(0,2),(\triangle,1),(\triangle,2),(\square,1),(\square,2)\}$

$A\times B \neq B\times A \quad \forall A,B$

$A=\{1,2\} \qquad A=\{1,2\}$

$A\times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} = A^2$

Uređen par elemenata a i b, u oznaci (a, b) je $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, gde je a prva komponenta, a b druga komponenta uređenog para.

Napomena: $(b, a) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ pa za $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$.
$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Dekartov proizvod skupova A i B je skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A, a druga komponenta iz skupa B, tj.
$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$
Na osnovu ovog primera može se zaključiti da Dekartov proizvod nije komutativan, tj. $A \times B \neq B \times A$.

Dekartov kvadrat skupa A je $A^2 = A \times A = \{(a_1, a_2) \,|\, a_1, a_2 \in A\}$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Binarna relacija je bilo koji podskup od $A \times B$, tj. $\rho \subseteq A \times B$.

Ako uređen par (x, y) pripada relaciji ρ kaže se da su x i y u relaciji ρ i piše se $(x, y) \in \rho$ ili $x \rho y$.

RELACIJA $\rightarrow$ **Binarna relacija skupa** A, je bilo koji podskup od A^2, tj. $\rho \subseteq A^2$.

Kako je $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ to su $\emptyset$ i A^2 sigurno relacije skupa A, i one se nazivaju prazna i puna relacija.

$2^4 = 16$

$A = \{1, 2\}$

$B = \{a, b\}$

$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$

$\mathcal{P}(A \times B) = \{\emptyset, \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}, \{(1,a)\}, \{(1,b)\}, \{(2,a)\}, \{(2,b)\},$
$\{(1,a),(1,b)\}, \{(1,a),(2,a)\}, \{(1,a),(2,b)\}, \{(1,b),(2,a)\}, \{(1,b),(2,b)\},$
$\{(2,a),(2,b)\}, \{(1,a),(1,b),(2,a)\}, \{(1,a),(1,b),(2,b)\},$
$\{(1,a),(2,a),(2,b)\}, \{(1,b),(2,a),(2,b)\}\}$

Relacije koje imaju konačno mnogo elemenata se mogu zadati na više načina. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $\rho \subseteq A^2$ tada se ρ može zadati na sledeće načine:

- nabrajanjem elemenata: $\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2)\}$
- pomoću drugih relacija: $\rho = \left\{(x, y) \in A^2 | x^2 + y \leq 6\right\}$
- tablično:

ρ	1	2	3
1	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\top$	$\top$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$

- grafički.

Relacije koje imaju beskonačno mnogo elemenata mogu se zadati pomoću drugih relacija ili se mogu opisati rečima govornog jezika.

$(x,y) \in \rho$ $\quad$ $x \rho y$

$(1,2) \in \rho$ $\quad$ $1 \rho 2$

$\mathbb{N}, \quad \leq$

$(1,2) \in \leq$

$1 \leq 2$

$A^2 = A \times A$
$= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$

$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

$\rho_2 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

$\rho_3 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$\rho_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

Inverzna relacija relacije ρ je $\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}$

Primer: Inverzne relacije relacija iz Primera * su:

$\rho_1^{-1} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$

$\rho_2^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_3^{-1} = \{(1,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_4^{-1} = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

$\rho_5^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,2)\}$

Osnovne osobine binarne relacije ρ skupa $A \neq 0$:

- **refleksivnost (R)**: $(\forall x \in A)\, x \rho x$
- **simetričnost (S)**: $(\forall x, y \in A)\, (x \rho y \Rightarrow y \rho x)$
- **antisimetričnost (A)**: $(\forall x, y \in A)\, (x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y)$ ili $(\forall x, y \in A)\, ((x \rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \rceil\, (y \rho x))$
- **tranzitivnost (T)**: $(\forall x, y, z \in A)\, ((x \rho y \wedge y \rho z) \Rightarrow x \rho z)$

Primer: Ispitati osobine sledećih relacija.

$$\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}, \; A = \{1,2,3\}$$

$(2,1),(1,2)$

$(1,2),(2,1)$

$(2,1),(1,2)$

R ✓

S ✓

A — $(1,2) \in \rho_1 \wedge (2,1) \in \rho_1$

T ✓

$\rho_2 = \{(1,2), (1,3), (\cancel{2,2}), (2,3), (3,2), (\cancel{3,3})\}$, $\boxed{A = \{1,2,3\}}$

R — $(1,1) \notin \rho_2$

S — $(1,2) \in \rho_2$ a $(2,1) \notin \rho_2$

A — $(2,3) \in \rho_2 \wedge (3,2) \in \rho_2$

T ✗

$(x,y) \in \rho_2 \wedge (y,z) \in \rho_2$

$\Rightarrow (x,z) \in \rho_2$

$$\rho_3 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}, \quad A = \{1,2,3\}$$

R — $(2,2) \notin \rho_3$

S — $(3,2) \in \rho_3$ a $(2,3) \notin \rho_3$

A — $(1,3) \in \rho_3 \wedge (3,1) \in \rho_3$

T — $(1,3) \in \rho_3 \wedge (3,2) \in \rho_3$, a $(1,2) \notin \rho_3$

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}, \boxed{A = \{1,2,3\}}$

R — $(1,1) \notin \rho_4$

S — $(1,2) \in \rho_4$ a $(2,1) \notin \rho_4$

A ✓

T ✓

$\underbrace{(1,3) \in \rho_4 \wedge \bot}_{\bot} \Rightarrow ($

$\rho_5 = \{\cancel{(1,1)}, (1,2), (1,3), \cancel{(2,2)}, (2,3)\}$, $\boxed{A = \{1,2,3\}}$

R – $(3,3) \in \rho_5$

S – $(1,2) \in \rho_5$ a $(2,1) \notin \rho_5$

A ✓

T ✓

$\rho_6 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

R ✓

S ✓

A ✓

T ✓

$\rho_7 = \{(1,1), (2,2)\}$

R —

S ✓

A ✓

T ✓

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija ekvivalencije (RST)** akko je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primer: relacija jednakosti $=$ na skupu realnih brojeva, relacija paralelnosti $\parallel$ na skupu svih pravih u prostoru, relacija podudarnosti na skupu svih duži, relacija
$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4), (4,3), (5,5)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija poretka (RAT)** akko je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Primer: relacije $\leq$ i $\geq$ na skupu prirodnih brojeva, relacija deli $|$ na skupu prirodnih brojeva, relacija

$$\begin{aligned} \rho_2 \quad = \quad & \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(1,4), \\ & (1,5),(2,4),(3,4),(3,5)\}\} \end{aligned}$$

na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....