

LOGIKA

Iskazi su rečenice za koje se zna da li su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$).
Obeležavaju se malim latiničnim slovima: p, q, r, koja se nazivaju iskazna slova.

Definicije osnovnih logičkih operacija:

Negacija

$\neg$	
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Konjukcija

$\wedge$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Disjunkcija

$\vee$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$

Implikacija

$\Rightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$

Ekvivalencija

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

$$x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$$\begin{array}{l} 2+3=7 \Rightarrow 3+2=5 \\ \perp \Rightarrow \top \\ 2+3=7 \Rightarrow 3+2=7 \\ \perp \Rightarrow \perp \end{array}$$

$$2+3=5 \Rightarrow 3+2=7$$

$\top$

$\perp$

$\top$

$\perp$

Rekurzivna definicija iskazne formule:

1. Iskazne konstante ($\top$, $\perp$) i iskazna slova su iskazne formule.
2. Ako su A i B iskazne formule, tada su i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ i $\neg A$ iskazne formule.
3. Iskazne formule se mogu dobiti samo konačnom primenom 1. i 2.

Uobičajeno je da se spoljašnje zagrade ne pišu. Kao i da se uzima da su operacije $\wedge$ i $\vee$ prioritnije.

Iskazne formule koje su tačne za sve vrednosti iskaznih slova nazivaju se **tautologije**.

Primeri tautologija: $p, q, r \in \{\top, \perp\}$

► komutativnost konjunkcije i disjunkcije:

$$\begin{aligned} p \wedge q &\Leftrightarrow q \wedge p \\ p \vee q &\Leftrightarrow q \vee p \end{aligned}$$

► asocijativnost konjunkcije i disjunkcije:

$$\begin{aligned} p \wedge (q \wedge r) &\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) &\Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \end{aligned}$$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

① $\top, \perp, p, q, r, \dots$
 ② $\neg p, p \Rightarrow \perp$
 $p \wedge r, \top \wedge p$
 $\perp \Leftrightarrow r$
 3, $\neg p \wedge (\perp \Leftrightarrow r)$

→
 $5 \cdot 4 = 2$

$a, b \in \mathbb{R}$
 $a \cdot b = b \cdot a$
 $a, b, c \in \mathbb{R}$
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Za iskazivanje tvrđenja osim logičkih operacija, potrebni su i **logički kvantifikatori** $\forall$ (za svako) i $\exists$ (postoji).

- ▶ $(\forall x) \alpha(x)$: "za svako x tačno je $\alpha(x)$ "
- ▶ $(\exists x) \alpha(x)$: "postoji x tako da važi $\alpha(x)$ "

$\forall$
 $\exists$

Primer:

- ▶ $(\forall x \in \mathbb{R}) ((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1)$
- ▶ $(\exists x \in \mathbb{R}) (x+2 = 5)$

Ako ispred x nije napisan nijedan kvantifikator tada se podrazumeva da stoji $\forall$.

Takođe se u svim definicijama podrazumeva ako i samo ako što će skraćeno biti zapisivano sa akko.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$a+b = b+a$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 - 1 = 0)$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$\exists!$

SKUPOVI

b.



$$\begin{aligned} a &\in A \\ b &\notin A \\ \neg(b \in A) \end{aligned}$$

Skup je osnovni pojam koji se ne definiše.

Skupovi se obeležavaju sa $A, B, C, \dots$, a elementi skupa sa $a, b, c, \dots$

Činjenica da je x elemenat skupa S obeležava se sa: $x \in S$ i čita x pripada skupu S , a činjenica da x nije elemenat skupa S obeležava se sa: $x \notin S$ i čita x ne pripada skupu S .

$$\begin{aligned} D &= \{ \heartsuit, 0, \square, \Delta \} \\ &\quad \{ \} \quad \{ \} \end{aligned}$$

Konačan skup se može definisati nabranjanjem elemenata.

Primer: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ili $B = \{a, b\}$ ili $C = \{\bullet, \circ, \ominus, \oplus\}$.

Ako je skup S beskonačan, tada se mora pronaći neka osobina π koju imaju elementi skupa S , a koju nema nijedan element koji ne pripada skupu S . Neka $\pi(x)$ znači da x zadovoljava uslov π tada se skup S zapisuje sa $S = \{x | \pi(x)\}$. Ovaj način zapisivanja skupova se može koristiti i za konačne skupove.

Primer: $A = \{x | x < 5 \wedge x \in \mathbb{N}\}$ ili $S = \{x | 2x - 3 = 0\}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Skup koji nema elemenata zove se **prazan skup** i obeležava se sa $\emptyset$ ili $\{\}$.
Napomena: $\{\emptyset\}$ - nije prazan skup već skup koji sadrži jedan element (prazan skup).

Skup kome pripadaju svi elementi svih skupova koje posmatramo zove se **univerzalni skup** i obeležava sa $\mathcal{U}$.

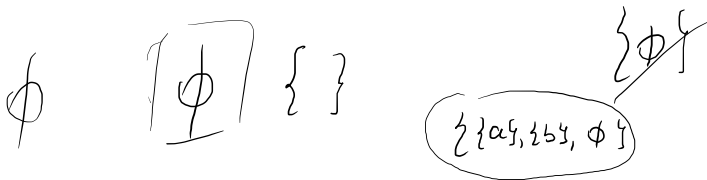
Redosled elemenata u skupi nije važan, tj. $\{a, b\} = \{b, a\}$.

U skupu $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ od n elemenata podrazumeva se da su svi elementi tog skupa međusobno različiti.

Kardinalni broj skupa A , je broj elemenata koji pripadaju skupu A , i obeležava se sa $Card(A)$.

$\#A$

Primer: $A = \{0, 1\} \Rightarrow Card(A) = 2$



$$\{1, 1, 2, 2\} = \{1, 2\}$$

Skupovne relacije i operacije se definišu preko odgovarajućih logičkih operacija:

► **jednakost** skupova: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}) (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

► skupovna **inkluzija** (podskup):
 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}) (x \in A \Rightarrow x \in B)$

pravi podskup: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

Za svaki skup A važi: $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$.

► **unija** skupova: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

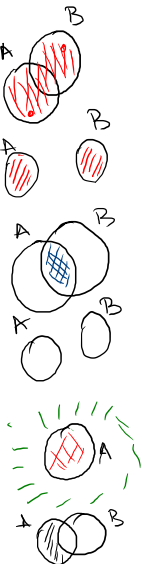
► **presek** skupova: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

Skupovi su disjunktni ako je njihov presek prazan skup, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.

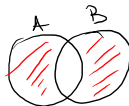
► **komplement** skupa: $\bar{A} = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$

► **razlika** skupova: $A \setminus B = \{x | \underbrace{x \in A}_{\text{pravi}} \wedge \underbrace{x \notin B}_{\text{pravi}}\}$

► **simetrična razlika** skupova:
 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



$A \subseteq A$

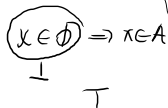


$A \subseteq B$

$\subset$



$A \subseteq A$
 $\emptyset \subseteq A$



Osobine skupovnih operacija:

$$\begin{array}{llll} \blacktriangleright & A \cap \emptyset = \emptyset & A \cap \mathcal{U} = A & A \cap \bar{A} = \emptyset & \bar{\bar{A}} = A \\ & A \cup \emptyset = A & A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} & A \cup \bar{A} = \mathcal{U} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright \text{zakon komutativnosti:} \\ A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright \text{zakon asocijativnosti:} \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright \text{zakon distributivnosti:} \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright \text{zakon idempotentnosti:} \\ A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright \text{zakon apsorpcije:} \\ A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright \text{De Morganovi zakoni:} \\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{array}$$

Partitivni skup skupa A , je skup svih podskupova skupa A , tj.

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Napomena: $\emptyset$ i A su uvek elementi skupa $\mathcal{P}(A)$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$

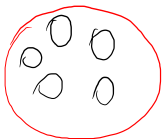
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$



Particija skupa A , je skup nepraznih podskupova skupa A , od kojih su svaka dva disjunktna, a njihova unija je skup A .

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$

Sve particije skupa A su $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{1, 2, 3\}$.



$$A = \{a, b\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$



$$1, X \neq \emptyset$$

$$2, X \cap Y = \emptyset$$

$$3, X \cup Y = A$$

$$A = \{a, b\}$$

$$\{\{a\}, \{b\}\}$$

$$\{\{a, b\}\}$$

$$B = \{0, 1, 2\}$$

$$\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}, \{\{0\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{0, 2\}\}, \{\{2\}, \{0, 1\}\}, \{\{0, 1, 2\}\}$$

Primer 1: Dati su skupovi

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

Odrediti: $\text{Card}(A)$, $\text{Card}(B)$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(B)$ i sve particije skupa B .

$$\text{Card}(A) = 5$$

$$\text{Card}(B) = 3$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\}$$

$$B \setminus A = \{6\}$$

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}\}$$

PARTICIE:

$$\{\{2\}, \{4\}, \{6\}\}$$

$$\{\{2, 4\}, \{2, 6\}\}$$

$$\{\{2, 6\}, \{4\}\}$$

$$\{\{2\}, \{4, 6\}\}$$

Primer 2: Dati su skupovi

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 8\} = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 2\} = \{1, 2\} \quad C$$

Odrediti: $\text{Card}(A)$, $\text{Card}(B)$, $\text{Card}(C)$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $\mathcal{P}(C)$ i sve particije skupa C .

$$\text{Card}(A) = 4$$

$$\text{Card}(B) = 4$$

$$\text{Card}(C) = 2$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$$

$$A \cup C = A$$

$$B \cup C = B$$

$$A \cap B = \{1, 2, 4\}$$

$$A \cap C = C$$

$$B \cap C = C$$

$$A \setminus B = \{3\}$$

$$A \setminus C = \{3, 4\}$$

$$B \setminus A = \{8\}$$

$$B \setminus C = \{4, 8\}$$

$$C \setminus A = \emptyset$$

$$C \setminus B = \emptyset$$

$$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, C, \{1\}, \{2\}\}$$

PARTICIJE:

$$\{\{1\}, \{2\}\}$$

$$\{\{1, 2\}\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$0 \notin \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$$

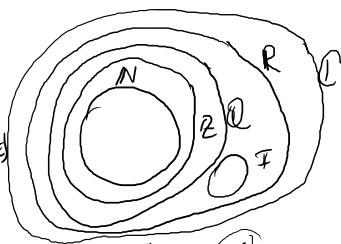
$$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots\}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$$

$$a \cdot (b+c) = ab+ac$$

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$



$$\frac{-7}{6} = -\frac{7}{6}$$

$$2$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$x \in \mathbb{Q}$$

$$\underline{i^2 = -1}$$

$i = \sqrt{-1}$ NIDE TAENO

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^9 = i$$

$$i^{10} = -1$$

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$i^{17} = i^{4 \cdot 4 + 1} = i^{4 \cdot 4} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^{23} = i^{4 \cdot 5 + 3} = i^{4 \cdot 5} \cdot i^3 = 1 \cdot i^2 \cdot i = -i$$

$$i^{2025} = i^{4 \cdot 506 + 1} = i$$

$$i^{173} = i^{4 \cdot 43 + 1} = i$$

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$\bar{z}_1 = 3 - 2i$$

$$\bar{z}_2 = -5 + i$$

$$\bar{z}_3 = -i - 1$$

$$\bar{z}_4 = -5i$$

$$\bar{z}_5 = -5$$

$$\bar{z}_6 = 0$$

$$z_1 = 3 + 2i$$

$$z_2 = -5 - i$$

$$z_3 = \frac{i-1}{-1+i}$$

$$z_4 = 5i$$

$$z_5 = -5$$

$$= -5 + 0i$$

$$z_6 = 0$$

$$\operatorname{Re}(z_1) = 3$$

$$\operatorname{Re}(z_2) = -5$$

$$\operatorname{Re}(z_3) = -1$$

$$\operatorname{Re}(z_4) = 0$$

$$\operatorname{Re}(z_5) = -5$$

$$\operatorname{Re}(z_6) = 0$$

$$\operatorname{Im}(z_1) = 2$$

$$\operatorname{Im}(z_2) = -1$$

$$\operatorname{Im}(z_3) = 1$$

$$\operatorname{Im}(z_4) = 5$$

$$\operatorname{Im}(z_5) = 0$$

$$\operatorname{Im}(z_6) = 0$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \wedge \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$$

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = \underline{a_1 a_2} + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 \overset{-1}{i^2}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

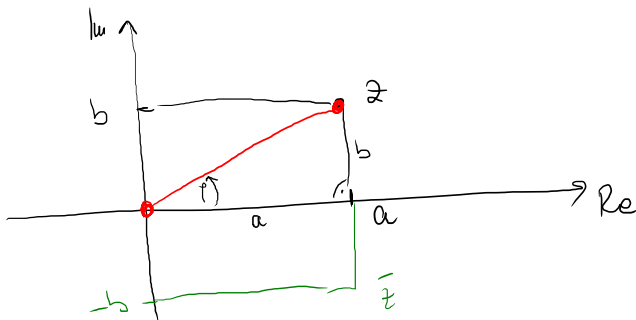
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 \overset{-1}{i^2}}{a_2^2 + b_2^2}$$

$z_2 \neq 0$

$$(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i) = a_2^2 - (b_2 i)^2 = a_2^2 + b_2^2$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2 i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

①

$$z_1 = 3 - 2i$$

$$z_2 = -1 + i$$

$$\operatorname{Re}(z_1) = 3$$

$$\operatorname{Re}(z_2) = -1$$

$$\operatorname{Im}(z_1) = -2$$

$$\operatorname{Im}(z_2) = 1$$

$$\bar{z}_1 = 3 + 2i$$

$$\bar{z}_2 = -1 - i$$

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_2| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{1+1} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$z_1 + z_2 = 2 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 2i) - (-1 + i) = 3 - 2i + 1 - i = 4 - 3i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i) \cdot (-1 + i) = -3 + 3i + 2i - 2i^2 = -3 + 3i + 2i - 2(-1) = -3 + 3i + 2i + 2 = -1 + 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 2i}{-1 + i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{-3 - 3i + 2i + 2i^2}{(-1)^2 - (i)^2} = \frac{-5 - i}{1 + 1} = \left(-\frac{5}{2} \right) \left(-\frac{1}{2}i \right)$$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$