$$\frac{\sin \cancel{x}}{\cancel{x}} = \sin$$

!

Funkcije

September 15, 2024

(a, b)

$A^2 = A \times A = \{(a,b) \mid a, b \in A\}$

$A = \{1, 2\}$ $\quad$ $A = \{1, 2\}$

$A^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

$\rho \subseteq A^2$

$\rho_1 = \emptyset$

$\rho_2 = A^2$

$\rho_3 = \{(1,1)\}$

$\rho_4 = \{(1,2), (2,1)\}$

$\vdots$

Funkcija $f \subseteq A \times B$ je binarna relacija kod koje ne postoje dva različita uređena para sa jednakim prvim komponentama, tj. za koju važi

$A = \{1, 2, 3\}$

$$\forall x, y, z, \ ((x, y) \in f \ \wedge \ (x, z) \in f \implies y = z).$$

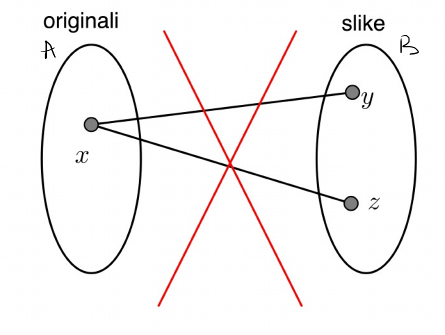
$f = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

$(x, y) \in \sin$

$y = \sin x$

$(x, y) \in {}^2$

$y = x^2$



Uobičajeno je da se umesto $\boxed{(x, y) \in f}$ piše $y = f(x)$.

Neka su A i B dva neprazna skupa.

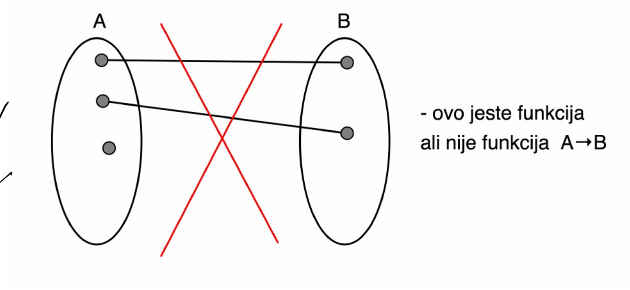
Funkcija f **iz skupa** A **u skup** B, u oznaci $f : A \longrightarrow B$, je ona funkcija kod koje je svakom elementu skupa A pridružen samo jedan elemenat skupa B.

$A = \{1,2\}$
$B = \{a,b\}$

$f_1 = \{(1,a),(2,b)\}$ ✓

$f_2 = \{(1,a),(1,b)\}$

$f_3 = \{(1,a)\}$

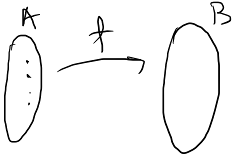


Nadalje će biti reći samo o funkcijama skupa A u skup B.

Neka je $f : A \longrightarrow B$. Tada se kaže da je

x	$f(x)$
original od $f(x)$	slika od x
nezavisna promenljiva	zavisna promenljiva
argument funkcije	vrednost funkcije

skup A	skup B
oblast definisanosti	skup vrednosti
domen	kodomen
$D(f)$	$K(f)$ $\overline{D}$



$f(x) = x^2$

$y = x^2$

$\sin x$

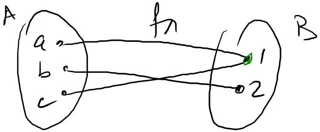
$\ln x$

$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$\ln x = y$

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2\}$



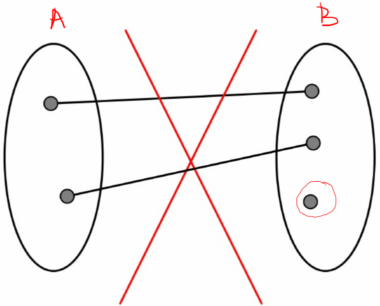
$f_1 = \{(a,1), (b,2), (c,1)\}$ jeste f_1, jeste $f_1 : A \longrightarrow B$

$f_2 = \{(a,1), (a,2)\}$ - nije f_2

$f_3 = \{(a,1), (b,1)\}$ - jeste f_3, nije $f_3 : A \longrightarrow B$

Funkcija $\boxed{f : A \longrightarrow B}$ je **sirjektivna, ("na")**, što se označava sa $f : A \overset{''na''}{\longrightarrow} B$, ako je svaki elemenat skupa B slika nekog elementa iz skupa A,
Dakle,

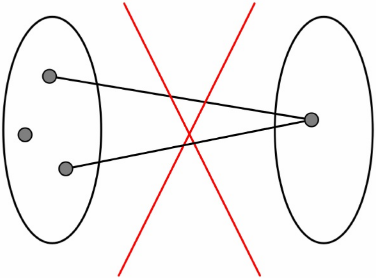
$$f : A \overset{''na''}{\longrightarrow} B \text{ ako } (\forall y \in B)(\exists x \in A)\, y = f(x).$$



- jeste funkcija f:A $\longrightarrow$ B,
ali nije "na"

Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **injektivna ("1-1")** što se označava sa $f : A \stackrel{"1-1"}{\longrightarrow} B$, ako se svaki elemenat iz skupa A preslika u različit elemenat skupa B.
Dakle,

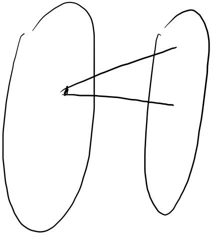
$$f \text{ je injektivna funkcija ako } (\forall x, y \in A)\,(f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)\,.$$



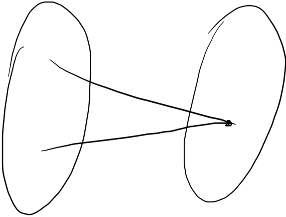
- jeste funkcija,
ali nije "1-1"

Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **bijektivna** ako je u isto vreme sirjektivna i injektivna.

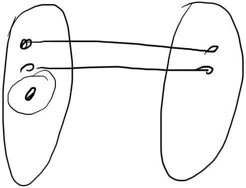
не е f



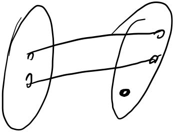
не е 1-1



не е $A \to B$



не е НО



- Za funkciju f kaže se da je funkcija **realne promenljive** ako je njen domen podskup skupa realnih brojeva, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$.
- Za funkciju kažemo da je **realna** ako je njen kodomen podskup skupa realnih brojeva, $K(f) \subseteq \mathbb{R}$.
- Prirodni domen (prirodna oblast definisanosti) za realne funkcije realne promenljive zadate formulom sastoji se od svih realnih brojeva za koje je izraz definisan.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f : A \to B$

$K(f) \subseteq \mathbb{R}$

$D(f) \subseteq \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$f : \boxed{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$

Primer: Odrediti prirodni domen funkcija:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
3. $f(x) = \frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x+2)(x-3)}$

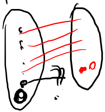
1) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \neq 0$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$

$\mathbb{R}$



1^{*} $f(x) = \frac{1}{x-3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$1''$ $f(x) = \frac{1}{(x+5)(x-1)}$

$x+5 \neq 0$
$x-1 \neq 0$

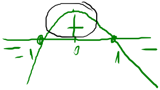
$x \neq -5$
$x \neq 1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1, -5\}$

2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$1 - x^2 \geq 0$

$1 - x^2 = 0$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1$



$x \in [-1, 1]$

$D = [-1, 1]$

$[\ \ ]\ \geq\ \leq$

$(\ \ )\ >\ <$

$x^2 \leq 1$

$\cancel{x \leq \pm 1}$

3) $x^2 + 1 \neq 0 \ \wedge \ x + 2 \neq 0 \ \wedge \ x - 3 \neq 0$

$\top \ \wedge \ x \neq -2 \ \wedge \ x \neq 3$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

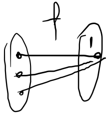
Neka su date funkcije $f : A \longrightarrow B$ i $g : C \longrightarrow D$. Kaže se da je funkcija f **jednaka** funkciji g i piše $f = g$ ako je:

1. $A = C$;
2. $B = D$;
3. $(\forall x \in A)(f(x) = g(x))$, tj. f i g imaju sve vrednosti jednake.

Primer: Da li su funkcije $g(x) = \dfrac{x}{x}$ i $f(x) = 1$ jednake?

$f(x) = 1$ $\qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \{1\}$

$g(x) = \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$ $\qquad g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \{1\}$



Primer: Da li su jednake funkcije f i g, definisane na prirodnom domenu?

1. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$
2. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} - 3$, $g(x) = x - 2$

1) $g(x) = \frac{1}{x-1}$ $\quad g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g(x) \neq f(x)$

$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \frac{1}{x-1}$ $\quad f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

2) $g(x) = x - 2$ $\quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1$ $\quad f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

Neka su A, B i C neprazni skupovi i neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ date funkcije. Funkcija $g \circ f : A \longrightarrow C$ definisana sa

$$(\forall x \in A)\,(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

zove se **kompozicija** funkcija f i g.

$y = \sin x^2$

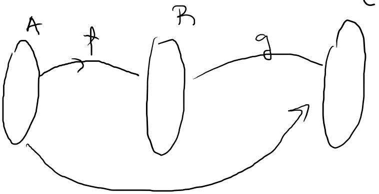
$y = (x+1)^2$

$g(x) = \sin x$

$f(x) = x^2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2)$

$= \sin x^2$



$g \circ f : A \to C$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$y = (x+1)^2$

$g(x) = x^2$

$f(x) = x+1$

$(g \circ f)(x) =$

$= g(f(x))$

$= g(x+1)$

$= (x+1)^2$

Primer: Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa

$$f(x) = x^3 + 1 \quad \text{i} \quad g(x) = 2x,$$

odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ i $g \circ g$.

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^3 + 1 = 8x^3 + 1$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3+1) = 2(x^3+1)$

$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(\overset{a}{x^3+1}) = (x^3+1)^3 + 1$

$(g\circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x) = 2\cdot 2x = 4x$

$f(1) = 1^3 + 1 = 2$

$f(-2) = (-2)^3 + 1 = -7$

$f(a) = a^3 + 1$

$f(5a) = (5a)^3 + 1$

$f(5x) = (5x^3) + 1$

$f(x+2) = (x+2)^3 + 1$

Primer: Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa

$$f(x) = 1 - 3x \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{x^2-1}{3},$$

odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ i $g \circ g$.

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^2-1}{3}\right) = 1 - \cancel{3}\,\frac{x^2-1}{\cancel{3}} = 1 - x^2 + 1 = -x^2$$

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(1-3x) = \frac{(1-3x)^2-1}{3} = \frac{\cancel{1}-6x+9x^2\cancel{-1}}{3} = -2x+3x^2$$

$$f\circ f(x) = f(f(x)) = f(1-3x) = 1-3(1-3x) = 1-3+9x = 9x-2$$

$$g\circ g(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x^2-1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{x^2-1}{3}\right)^2-1}{3}$$

$$f\circ f\circ f(x) = f(f(f(x))) = f(f(1-3x)) = f(1-3(1-3x))$$

$$= f(9x-2) = 1-3(9x-2)$$

$$y = \sin(\ln x)$$

$$f(x) = \ln x$$

$$g(x) = \sin x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sin(\ln x)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ g(x) = \ln x \end{array}\right\} \quad (f \circ g)(x)$$

$$y = e^{2x+5}$$

$$f(x) = e^{x}$$

$$g(x) = 2x+5$$

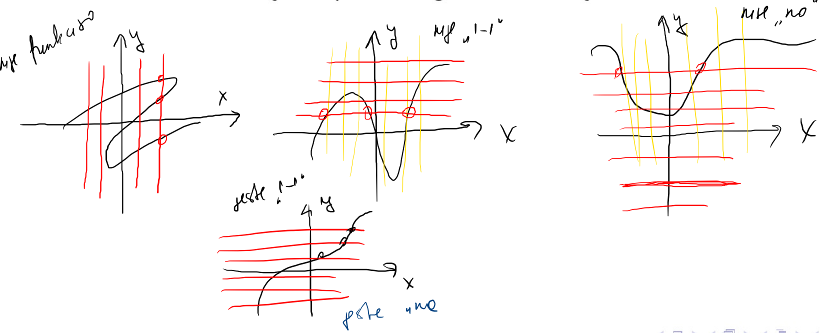
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+5) = e^{2x+5}.$$

Relacija koja je zadata grafički je funkcija akko svaka prava paralelna sa y-osom seče dati grafik u najviše jednoj tački.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je injektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima najviše jedan presek sa grafikom funkcije.

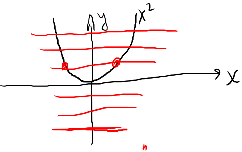
Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je sirjektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima bar jedan presek sa grafikom funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je bijektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima tačno jedan presek sa grafikom funkcije.



$\boxed{f(x)=x^2}$

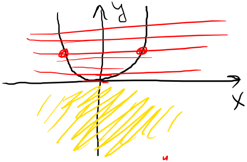
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



nie „1–1"

nie „na"

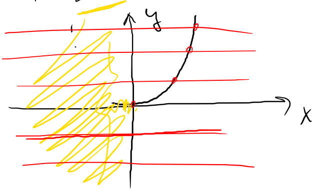
$f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$



nie „1–1"

jest „na"

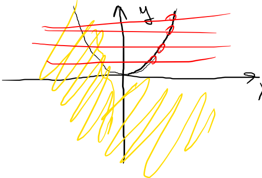
$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$



jest „1–1"

nie „na"

$f: [0,\infty) \to [0,\infty)$



jest „1–1"

jest „na"

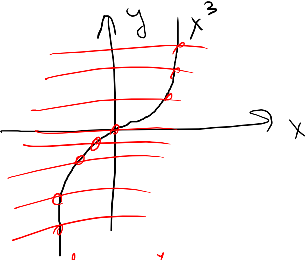
$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2^2} = 2$$

$$\sqrt{(-2)^2} = 2$$

$f(x) = x^3$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

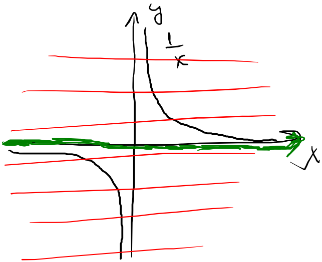


jest „1-1"

jest „na"

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$



jest „1-1"

nie „na"

$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Ako je $f : A \longrightarrow B$ bijekcija onda se može definisati funkcija $g : B \longrightarrow A$ tako da važi

$$f(g(y)) = y, \qquad \forall y \in B$$

$$g(f(x)) = x, \qquad \forall x \in A$$

Funkcija g naziva se inverzna funkcija funkcije f i označava sa f^{-1}.

$$f \circ f^{-1} = i_B \qquad f^{-1} \circ f = i_A$$

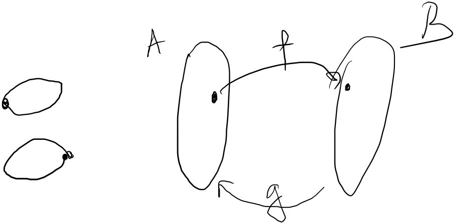
$i_B : B \longrightarrow B$, $i_B(b) = b$, $\forall b \in B$
$i_A : A \longrightarrow A$, $i_A(a) = a$, $\forall a \in A$
su identičke funkcije skupova A i B.

$f(x) = x^3$
$g(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = x$

$g(f(x)) = g(x^3) = x$

$f(x) = x$
$f(2) = 2$
$f(5) = 5$
$f(10) = 10$



$f^{-1}(f(x)) = x$
$f(f^{-1}(x)) = x$

Primer: Za funkcije $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definisane sa

$$\boxed{f(x)=x^3+1} \quad \text{i} \quad g(x)=2x,$$

odrediti: f^{-1} i g^{-1} (ako postoje).

$f^{-1}(f(x))=x$

$f^{-1}(x^3+1)=x$

$x^3+1=t$

$x^3=t-1$

$x=\sqrt[3]{t-1}$

$f^{-1}(t)=\sqrt[3]{t-1}$

$$\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}}$$

„1-1": $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$?

$f(x)=f(y)\Rightarrow x^3+\cancel{1}=y^3+\cancel{1}$

$\Rightarrow x=y$

„na": $\forall y\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, f(x)=y$?

$f(x)=y$

$x^3+1=y$

$x=\sqrt[3]{y-1}$

„1-1": $g(x)=g(y)\Rightarrow x=y$?

$g(x)=g(y)\Rightarrow 2x=2y\Rightarrow x=y$

„na": $\forall y\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, g(x)=y$?

$g(x)=y$

$2x=y$

$\boxed{x=\frac{y}{2}}$

$\forall y\in\mathbb{R}, \exists x=\frac{y}{2},$

$g(x)=g\left(\frac{y}{2}\right)=2\cdot\frac{y}{2}=y$

$g^{-1}(g(x))=x$

$g^{-1}(2x)=x$

$2x=t$

$x=\frac{t}{2}$

$g^{-1}(t)=\frac{t}{2}$

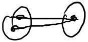
$$\boxed{g^{-1}(x)=\frac{x}{2}}$$

Primer: Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa

$$f(x) = 1 - 3x \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{3},$$

odrediti: f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

1-1: $\boxed{g(x) = g(y) \Rightarrow x = y}$?



$g(x) = g(y) \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{\cancel{3}} = \frac{y^2 - 1}{\cancel{3}}$

$\Rightarrow x^2 - \cancel{1} = y^2 - \cancel{1}$

$\Rightarrow x^2 = y^2$

NIJE „1-1"

$\Rightarrow x = y \lor x = -y$

$g(1) = \frac{1-1}{3} = 0$

$g(-1) = \frac{1-1}{3} = 0$

$g(1) = g(-1)$

$1 \neq -1$

NIJE BIJEKCIJA $\Rightarrow$ NEMA g^{-1}

1-1: $\boxed{f(x) = f(y) \Rightarrow x = y}$?

$f(x) = f(y) \Rightarrow \cancel{1} - 3x = \cancel{1} - 3y$

jeste „1-1" $\Rightarrow -\cancel{3}x = -\cancel{3}y$

$\Rightarrow x = y$

NA: $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y}$?

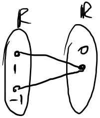
$f(x) = y$

$1 - 3x = y$

$-3x = y - 1$

$x = \frac{1-y}{3}$

jeste „na"



$f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1}(1 - 3x) = x$

$1 - 3x = t$

$-3x = t - 1$

$x = \frac{1-t}{3}$

$f^{-1}(t) = \frac{1-t}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{3}$

$$\left(\frac{2x+3}{x^2+x+1} = \frac{2x+3}{x^2} + \frac{2x+3}{x} + \frac{2x+3}{1} \right)$$

$$\left(\frac{\cancel{\sin x} + 2 + \cos^2 x}{\cancel{\sin x} \cdot \cos x} \right)$$

$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$\sin(x)$

$$\frac{\sin \cancel{x}}{\cancel{x}}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = y$

$\sin x$