Linearna funkcija, linearna jednačina i nejednačina

16. септембар 2024.

Linearna funkcija definisana na skupu $\mathbb{R}$ je funkcija $y = f(x)$ određena sa

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{y = ax + b,} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Za fiksirano a i b grafik linearne funkcije je prava.
Broj $a \in \mathbb{R}$ je koeficijent pravca prave.

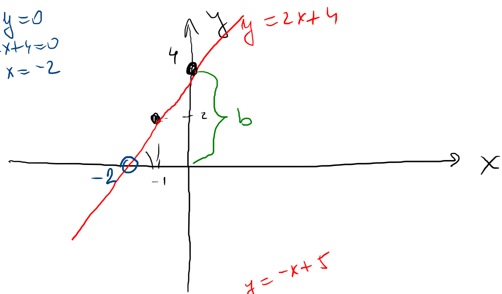
- Ako je $a > 0$ prava sa pozitivnim delom $x-$ose gradi oštar ugao, tj. funkcija je rastuća.
- Ako je $a < 0$ prava sa pozitivnim delom $x-$ose gradi tup ugao, tj. funkcija je opadajuća.
- Ako je $a = 0$ prava je paralelna sa $x-$osom, tj. u pitanju je konstantna funkcija $f(x) = n$.

1) $y = 2x + 4$

$x = 0 \to y = 4$

$x = -1 \to y = 2$

$y = 0$
$2x + 4 = 0$
$x = -2$

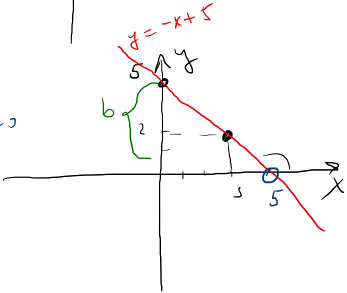


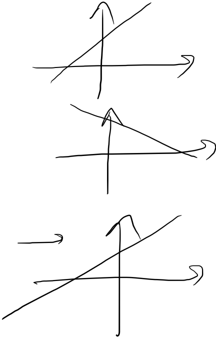
2) $y = -x + 5$

$x = 0 \to y = 5$

$x = 3 \to y = 2$

$y = 0$
$-x + 5 = 0$
$x = 5$





Nula funkcije je rešenje linearne jednačine $y = 0$, tj.

$$\boxed{y=0}$$

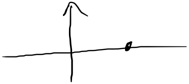
$$ax + b = 0,$$

$ax+b=0$, $a \neq 0$

pa ako je $a \neq 0$ njeno rešenje je

$$x = -\frac{b}{a}$$

$x = -\frac{b}{a}$



i predstavlja apscisu presečne tačke grafika (prave) i $x-$ose, tj. tačka preseka grafika funkcije i $x-$ose je $T(-\frac{b}{a}, 0)$.

Presek grafika sa $y-$osom se dobija za $x = 0$, tj. to je tačka $(0, b)$.

$x=0$

$y = a\cdot 0 + b$

$y = b$

Položaj prave je određen sa dve tačke.

Tačka u $xy-$ravni ima dve koordinate $M(x_0, y_0)$ i x_0 je apscisa dok je y_0 ordinata.

Primer 1: Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato sa $\boxed{f(x) = 3x - 2.}$
Izračunati $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(f(0))$, $f(-x)$, $f(f(x))$.
Nacrtati grafik funkcije.

$f(-2) = 3(-2) - 2 = -8$

$f(-1) = 3(-1) - 2 = -5$

$f(0) = -2$

$f(f(0)) = f(-2) = -8$

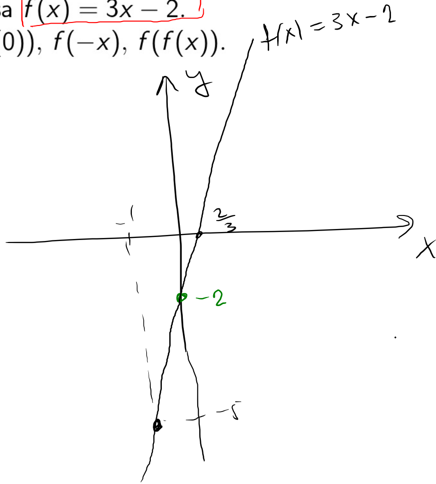
$f(-x) = 3(-x) - 2 = -3x - 2$

$f(f(x)) = f(3x-2) = 3(3x-2) - 2$

$3x - 2 = 0$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$



Primer 2: U istom koordinatnom sistemu konstruisati grafike sledećih funkcija $y = \frac{1}{2}x$, $\boxed{y = x}$, $y = 2x$ i $y = 4x$.

$y = \frac{1}{2}x$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

$y = 2x$

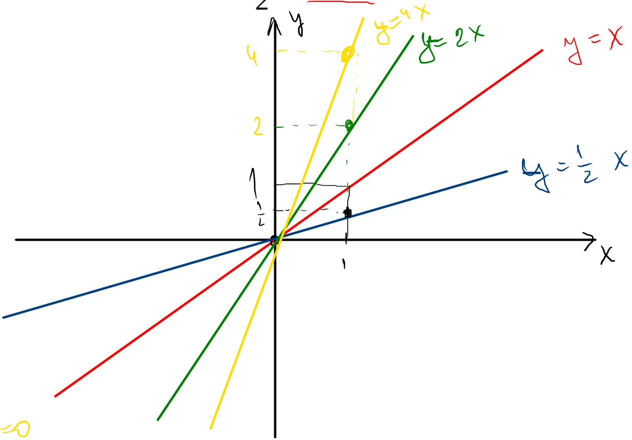
$x = 0 \rightarrow y = 0$

$x = 1 \rightarrow y = 2$

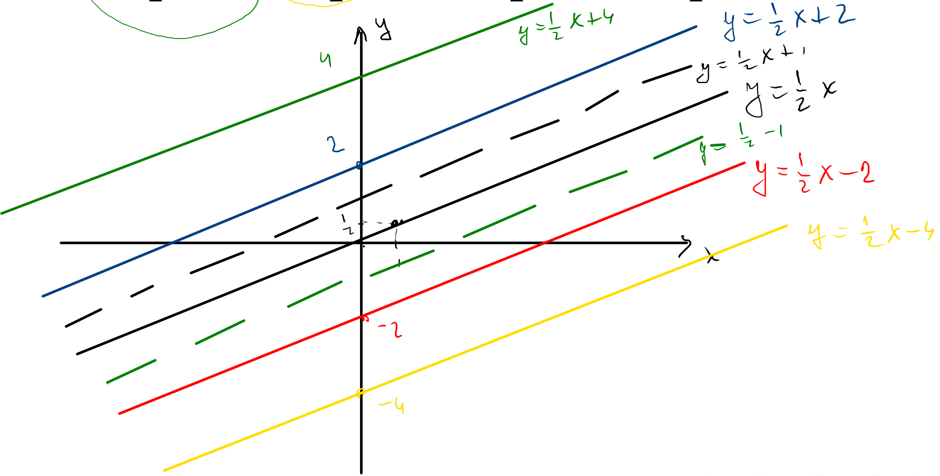
$y = 4x$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$x = 1 \rightarrow y = 4$



Primer 3. U istom koordinatnom sistemu konstruisati grafike sledećih funkcija $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = \frac{1}{2}x - 2$, $y = \frac{1}{2}x + 4$, $y = \frac{1}{2}x - 4$, $y = \frac{1}{2}x + 1$ i $y = \frac{1}{2}x - 1$.



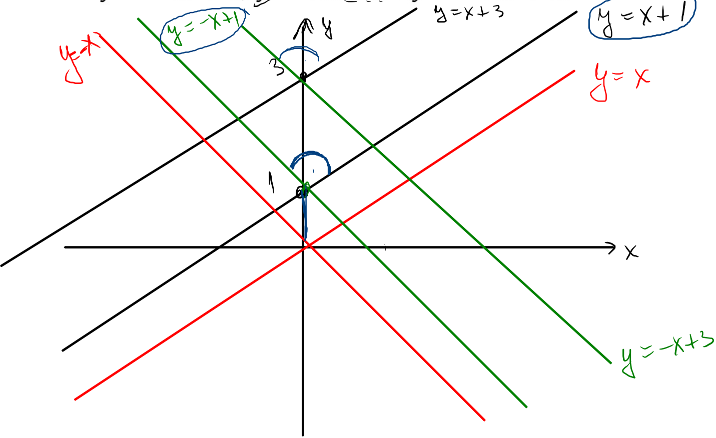
Primer 4. U istom koordinatnom sistemu konstruisati grafike sledećih funkcija $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = x + 3$, $y = -x + 3$, $\cancel{y = 2x + 3}$ ~~i~~ $\cancel{y = -2x + 3}$.

NORMALNE

$$a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

$y = a_1 x + b_1$

$y = a_2 x + b_2$



$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

$$\boxed{y - y_1 = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{k}(x - x_1)}$$

$A(1, 3)$

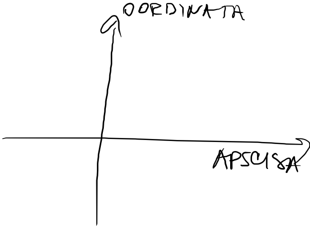
$B(-2, 6)$

$$y - 3 = \frac{6-3}{-2-1}(x - 1)$$

$$y - 3 = -(x-1)$$

$$y - 3 = -x + 1$$

$$y = -x + 4$$



Linearna jednačina je

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0.$$

Rešenje linearne jednačine je

$$x = -\frac{b}{a}$$

i predstavlja apscisu presečne tačke grafika (prave) i x-ose.

Primer 1: Rešiti jednačine:

1. $$\frac{6x^2+9}{3x^2-x} - 2 = \frac{3}{x} - \frac{3}{3x-1}$$

Uslovi:

$3x^2 - x \neq 0$

$x(3x-1) \neq 0$

$\boxed{x \neq 0} \wedge 3x-1 \neq 0$

$\boxed{x \neq \frac{1}{3}}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$

$$\frac{6x^2+9-2(3x^2-x)}{3x^2-x} = \frac{3(3x-1)-3x}{x(3x-1)}$$

$$\frac{\cancel{6x^2}+9-\cancel{6x^2}+2x}{\cancel{3x^2-x}} = \frac{9x-3-3x}{\cancel{3x^2-x}} \quad / \cdot 3x^2-x \neq 0$$

$2x+9 = 6x-3$

$4x = 12$

$x = 3$

2. $\frac{3x+2}{x-1} + \frac{2x+3}{1-x} = 0$

uslov:

$x-1 \neq 0$

$x \neq 1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\frac{3x+2}{x-1} - \frac{2x+3}{x-1} = 0$$

$$\frac{3x+2-2x-3}{x-1} = 0 \quad \Big/ \cdot (x-1) \neq 0$$

$$x-1=0$$

$$\cancel{x=1} \notin D$$

$$R = \emptyset$$

3. $|x + 2| - 3 = 2x - 6$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x+2 \geq 0 \\ -(x+2), & x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$$

$-x-2$ $\qquad$ $x+2$

-2

I $\quad \boxed{x < -2}$

$-x-2-3 = 2x-6$

$-3x = -1$

$\cancel{x = \frac{1}{3}} > -2$

II $\quad x \geq -2$

$x+2-3 = 2x-6$

$-x = -5$

$\boxed{x = 5} \geq -2$

Linearna nejednačina je

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0,$$

pri čemu umesto znaka $>$ može se nalaziti bilo koji od znakova $\geq, <, \leq$.
Prilikom pronalaženja rešenja razlikujemo sledeće slučajeve:

- Ako je $a > 0$ tada je

$$\begin{aligned} ax + b &> 0 \\ ax &> -b \\ x &> -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

- Ako je $a < 0$ tada je

$$\begin{aligned} ax + b &> 0 \\ ax &> -b \\ x &< -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Primer 2: Rešiti nejednačine:

1. $\dfrac{x-3}{x-1} \boxed{>} \dfrac{x-5}{x-3}$

uslov:

$x-1 \neq 0 \ \wedge \ x-3 \neq 0$

$x \neq 1 \ \wedge \ x \neq 3$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

$$\frac{x-3}{x-1} - \frac{x-5}{x-3} > 0$$

$$\frac{(x-3)^2-(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-3)} > 0$$

$$\frac{\cancel{x^2}\cancel{-6x}+9\cancel{-x^2}\cancel{+x}\cancel{+5x}-5}{(x-1)(x-3)} > 0$$

$$\frac{4}{(x-1)(x-3)} > 0$$

$(x-1)(x-3) > 0$

I $(x-1>0 \ \wedge \ x-3>0) \vee (x-1<0 \ \wedge \ x-3<0)$

$(x>1 \ \wedge \ x>3) \vee (x<1 \ \wedge \ x<3)$

$x>3 \quad \vee \quad x<1$

$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

II $x-1=0$

$x=1$

$x-3=0$

$x=3$

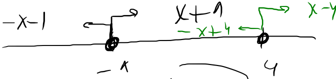
III

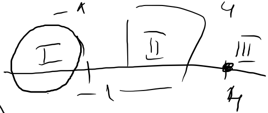
		1		3	
$x-1$	−	0	+		+
$x-3$	−		−	0	+
$(x-1)(x-3)$	+		−		+

2. $|x+1| + |x-4| > 7$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \\ -(x+1), & x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$$

$$|x+4| = \begin{cases} x-4, & x-4 \geq 0 \\ -(x-4), & x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4, & x \geq 4 \\ -x+4, & x < 4 \end{cases}$$





I $\boxed{x < -1}$

$$-x-1+(-x+4) > 7$$
$$-x-1-x+4 > 7$$
$$-2x+3 > 7$$
$$-2x > 4 \quad |:(-2)<0$$
$$x < -2$$

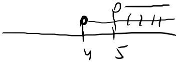
$$\boxed{x \in (-\infty, -2)}$$

II $-1 \leq x < 4$

$$x+1+(-x+4) > 7$$
$$\cancel{x}+1-\cancel{x}+4 > 7$$
$$5 > 7$$
$$x \in \emptyset$$

III $\boxed{x \geq 4}$

$$x+1+x-4 > 7$$
$$2x-3 > 7$$
$$2x > 10$$
$$\boxed{x > 5}$$
$$\boxed{x \in (5, \infty)}$$



$$x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$$

3. $\dfrac{x^2 + |x - 1|}{x - 3} \leq x$