Sistemi linearnih jednačina

September 16, 2024

Sistem m **linearnih jednačina** sa n nepoznatih je

$$S: \quad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y \boxed{-3} = 0 \\ 5x + 7y \boxed{+4} = 0 \end{array}$$

$(x, y) = (1, 0)$

$1 + 2 \cdot 0 - 3 = -2 \neq 0$

gde je $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uređena n-torka nepoznatih, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ su koeficijenti, a $b_i \in \mathbb{R}$ slobodni članovi, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ako je broj jednačina u sistemu jednak broju nepoznatih (tj. $m = n$) tada se sistem zove **kvadratni** sistem.

Ako su u sistemu svi slobodni članovi jednaki nuli (tj. ako je $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$,) onda se sistem naziva **homogen** sistem.

Skup rešenja sistema S, u oznaci R_s, čine sve uređene n-torke brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ koje zadovoljavaju svaku jednačinu sistema.

$x = 1 \qquad y = 5$

$(1, 5)$

U zavisnosti od broja rešenja sistema, tj. prirode sistema, sistem može biti:

SAGLASAN
1. ODREĐEN - ima tačno jedno rešenje;
2. NEODREĐEN - ima više od jednog rešenja;

NESAGLASAN → 3. NEMOGUĆ (kontradiktoran, protivrečan)- nema rešenja.

Ako sistem ima bar jedno rešenje kaže se da je saglasan.

Homogen sistem sa $n \in \mathbb{N}$ promenljivih je uvek saglasan jer uvek ima bar jedno (trivijalno) rešenje $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.
Dakle, homogen sistem nikad nije nemoguć.

$$\begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ \hline (0,0) \\ (1,-1) \\ (-1,1) \\ (-2,2) \\ (2,-2) \end{array}$$

$$\{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+y=5 \\ \hline 0=5 \ \lightning \end{array}$$

Primer:

a) $\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \end{array}$, $\Big\}$ $3 = 4$ $\lightning$

ovaj sistem je nemoguć, tj. nema rešenja. $R_S = \emptyset$.

b) $\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ & & x_2 & = & 3 \end{array}$,

$x_2 = 3$
$x_1 + 3 = 4$
$x_1 = 1$

$R_s = \{(1,3)\}$

ovaj sistem je određen. $R_S = \{(1,3)\}$.

c) $\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \end{array}$, $/\cdot(3)$

$3x_1 + 3x_2 = 6$

ovaj sistem je neodređen, ima beskonačno mnogo rešenja.
$R_S = \{(t, 2-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$t = 0$ $(0,2)$
$u = 2$ $(0,2)$

$x_1 + x_2 = 2$
$x_1 = 2 - x_2$

$x_2 = u, \quad u \in R$
$x_1 = 2 - u$
$R_s = \{(2-u, u) \mid u \in R\}$

Dva sistema jednačina su ekvivalentna ako i samo ako su im jednaki skupovi rešenja.

Primenom elementarnih transformacijama na sistem linearnih jednačina dobija se sistem ekvivalentan polaznom sistemu.

Elementarne transformacije sistema linearnih jednačina su:

1 ▶ zamena mesta jednačinama;

2 ▶ množenje jednačine skalarom različitim od nule;

3 ▶ množenje jednačine skalarom i dodavanje nekoj drugoj jednačini;

4 ▶ promena mesta sabircima u jednačinama (iste nepoznate pišu se jedna ispod druge odnosno u istoj koloni).

$$\begin{aligned} x+y&=2 \\ 3x+5y&=6 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

1) $$\begin{aligned} 3x+5y&=6 \\ x+y&=2 \end{aligned}$$

4, $$\begin{aligned} y+x&=2 \\ 5y+3x&=6 \end{aligned}$$

2, $$\begin{aligned} x+y&=2 \\ 6x+10y&=12 \end{aligned}$$

3, $$\begin{aligned} x+y&=2 \quad \cdot(-3) \\ 3x+5y&=6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y&=2 \\ 2y&=0 \end{aligned}$$

$y=0$

$x=2$

$(2,0)$

Postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina

Gausov postupak (Gausov algoritam, Gausova metoda eliminacije)

Može se primeniti za izračunavanje proizvoljnog sistema jednačina. Sastoji se u tome da se pomoću navedenih elementarnih transformacija koje očuvavaju ekvivalentnost sistema, dobije trougaoni oblik iz kojeg se lako izračunavaju nepoznate.

$$\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 5y+4z=1 \\ 7z=7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x \quad +3z=5 \\ 3x \quad +7z=2 \end{array}$$

Primer: Gausovim postupkom, rešiti sistem linearnih jednačina

a)
$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ \boxed{3x} & - & 4y & = & -5 \end{array} . \quad -3$$

Množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem drugoj jednačini dobija se

$$-3 \quad \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & -5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ & - & 10y & = & -20 \end{array} .$$

$y = \frac{-20}{-10} = 2$

$x + 4 = 5$

$x = 1$

$(1, 2)$

Iz druge jednačine sledi da je $y = 2$. Uvrštavanjem te vrednosti u prvu jednačinu dobija se $x = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s = \{(1, 2)\}$.

$$\text{b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ \boxed{2x} & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ \boxed{3x} & - & y & & & = & 1 \end{array} ;$$

-2 -3

Množenjem prve jednačine sa -2 i dodavanjem drugoj jednačini, a potom množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem trećoj jednačini dobija se

-2 -3

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & - & 4y & - & 3z & = & -17 \end{array} .$$

4

Množenjem druge jednačine sa 4 i dodavanjem trećoj jednačini, dobija se

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & & & - & 19z & = & -57 \end{array} .$$

$z = \frac{-57}{-19} = 3$

$y - 12 = -10$

$y = 2$

$x + 2 + 3 = 6$

$x = 1$

$R_s = \{(1,2,3)\}$

Dobijen je trougaoni oblik iz kojeg se iščitavaju rešenja. Iz treće jednačine sledi da je $z = 3$. Zamenom u drugu jednačinu dobija se $y = -10 + 4 \cdot 3 = 2$, a zamenom u prvu $x = 6 - 2 - 3 = 1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s = \{(1, 2, 3)\}$.

1. Rešiti sledeće sisteme linearnih jednačina:

1.1 $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 7 \\ 4x & - & 3y & = & 2 \end{array}$; -4

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 7 \\ -7y & = & -26 \end{array}$$

$$y = \frac{-26}{-7} = \frac{26}{7}$$

$$x + \frac{26}{7} = 7$$

$$x = 7 - \frac{26}{7}$$

$$x = \frac{23}{7}$$

$$R_S = \left\{\left(\frac{23}{7}, \frac{26}{7}\right)\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 7 \\ 4x - 3y & = & 2 \end{array} \quad 3$$

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 7 \\ 7x & = & 23 \end{array}$$

$$x = \frac{23}{7}$$

$$y = \frac{26}{7}$$

$$\begin{array}{rcl} y + x & = & 7 \\ -3y + 4x & = & 2 \end{array} \quad 3$$

$$\begin{array}{rcl} y + x & = & 7 \\ 7x & = & 23 \end{array}$$

1.2 $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 5 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}$; $\cdot(-1)$

$$x + y = 5$$
$$-2y = -4$$

$$y = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

$$R_S = \{(3, 2)\}$$

$$y + x = 5$$
$$-y + x = 1 \quad +$$

$$y + x = 5$$
$$2x = 6$$

$$x = 3$$
$$y = 2$$

1.3 $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 3x & + & 3y & = & 11 \end{array} \quad -3$$

$$x + y = 2$$

$$0 = 5$$

NEMOGUĆ

1.4 $\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 5y & = & 1 \\ 4x & - & 10y & = & 2 \end{array}$; -2

$$2x - 5y = 1$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$2x - 5y = 1$$

$$\boxed{2x = 1 + 5y}$$

$$x = \frac{1+5y}{2}$$

$$y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x = \frac{1+5t}{2}$$

$$R_s = \left\{ \left(\frac{1+5t}{2}, t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

1 X NEODREDEN

1.5
$$\begin{aligned} x + 3y - 5z &= 6 \\ 2x \qquad + z &= 3 \\ 3x + 3y - 4z &= 9 \end{aligned} \quad \cdot(-2),\ \cdot(-3)$$

$$\begin{aligned} x+3y-5z &= 6 \\ -6y+11z &= -9 \\ -6y+11z &= -9 \end{aligned} \quad \cdot(-1)$$

$$\begin{aligned} x+3y-5z &= 6 \\ -6y+11z &= -9 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+3y &= 6+5z \\ -6y &= -9-11z \end{aligned}$$

1X NEODREĐEN

$$\begin{aligned} x+3y-5z&=6 \\ 2x \quad +z&=3 \\ 2x \quad z&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y+x-5z &= 6 \\ 2x+z &= 3 \\ 3y+3x-4z &= 9 \end{aligned} \quad \cdot(-1)$$

$$\begin{aligned} 3y+x-5z &= 6 \\ 2x+z &= 3 \\ 2x+z &= 3 \end{aligned}$$

$z = t, \quad t \in \mathbb{R}$

$-6y = -9 - 11t$

$y = \frac{3}{2} + \frac{11}{6}t$

$x + 3\left(\frac{3}{2} + \frac{11}{6}t\right) = 6 + 5t$

$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$

$R_S = \left\{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, \frac{3}{2} + \frac{11}{6}t, t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

1.6 $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 3y & - & 5z & = & 6 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array};$$

1.7
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array} \;;$$

1.8 $$\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & - & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 4y & + & 12z & = & -4 \\ 3x & + & 3y & + & 9z & = & -3 \end{array};$$

1.9
$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 6 \\ 2x & + & y & = & 9 \\ 4x & + & 2y & = & 18 \end{array} ;$$

1.10 $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$;

1.11 $$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & + & 2u & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & - & u & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & u & = & 5 \\ -x & - & y & + & 2z & + & u & = & 3 \end{array};$$

1.12
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & - & 2u & + & 4v & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & 5z & + & u & + & 7v & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & + & 8u & + & 2v & = & 1 \end{array}.$$

1.13
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & - & 2u & + & 4v & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & 5z & + & u & + & 7v & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & + & 8u & + & 2v & = & 7 \end{array}.$$