Relacije

September 15, 2024

$a \neq b$

Uređen par elemenata a i b, u oznaci (a,b) je $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$, gde je a prva komponenta, a b druga komponenta uređenog para.

$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$

$\{a,b\}=\{b,a\}$ ✓

$(b,a)=\{\{b\},\{a,b\}\}$

Napomena: $(b,a) = \{\{b\},\{a,b\}\}$ pa za $a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$.
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

$(a,b) \neq (b,a)$

$(a,b)=(b,a)$?

$\forall a,b$

nije za svako

$\{a,a\}=\{a\}$

(a,a)

Dekartov proizvod skupova A i B je skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A, a druga komponenta iz skupa B, tj.
$A \times B = \{(a,b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$.

$a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$

Primer: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x,y\}$
$A \times B = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$
$B \times A = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$
Na osnovu ovog primera može se zaključiti da Dekartov proizvod nije komutativan, tj. $A \times B \neq B \times A$.

Dekartov kvadrat skupa A je $A^2 = A \times A = \{(a_1,a_2) \,|\, a_1, a_2 \in A\}$.

Primer: $A = \{1,2,3\}$
$A^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

$\rho_1 = \{(a,1), (a,2)\}$

$\rho_2 = \{(b,1), (a,3), (a,2)\}$

$\rho_3 = \emptyset$

$A = \{a, b\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$$\boxed{A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}}$$

$$B \times A = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

$$A \neq B \Rightarrow A \times B \neq B \times A \qquad A = B$$

$$A^2 = A \times A \qquad A = \{a, b\} \qquad A = \{a, b\}$$

$$= \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$$

Binarna relacija je bilo koji podskup od $A \times B$, tj. $\rho \subseteq A \times B$.

Ako uređen par (x, y) pripada relaciji ρ kaže se da su x i y u relaciji ρ i piše se $(x, y) \in \rho$ ili $x\rho y$.

Binarna relacija skupa A**,** je bilo koji podskup od A^2, tj. $\rho \subseteq A^2$.

Kako je $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ to su $\emptyset$ i A^2 sigurno relacije skupa A, i one se nazivaju prazna i puna relacija.

$$\boxed{A = \{1,2\}}$$

$(a,2) \in \rho_1$ $\quad$ $a \rho_1 2$

$(a,2) \in <$ $\quad$ $a < 2$

$A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$\rho_1 = \emptyset$

$\rho_2 = \{(1,1)\}$

$\rho_3 = \{(1,2)\}$

$\rho_4 = \{(2,1)\}$

$\rho_5 = \{(2,2)\}$

$\rho_6 = \{(1,1),(1,2)\}$

$\vdots$

$A = \{1,2\}$

$\leq \in \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

$1 \leq 1$ $\quad$ $\neg(2 \leq 1)$

$1 \leq 2$

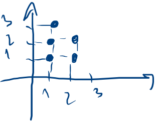
$2 \leq 2$

Relacije koje imaju konačno mnogo elemenata se mogu zadati na više načina. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $\rho \subseteq A^2$ tada se ρ može zadati na sledeće načine:

- nabrajanjem elemenata: $\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2)\}$
- pomoću drugih relacija: $\rho = \{(x, y) \in A^2 | x^2 + y \leq 6\}$
- tablično:

ρ	1	2	3
1	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\top$	$\top$	$\bot$
3	$\bot$	$\bot$	$\bot$

- grafički.



$A^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), \cancel{(2,3)}, \cancel{(3,1)}, \cancel{(3,2)}, \cancel{(3,3)}\}$

Relacije koje imaju beskonačno mnogo elemenata mogu se zadati pomoću drugih relacija ili se mogu opisati rečima govornog jezika.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$

$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

$\rho_2 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

$\rho_3 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ $\rightarrow$ $\rho_3^{-1} = \{(1,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$\rho_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

Inverzna relacija relacije ρ je $\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}$

Primer: Inverzne relacije relacija iz Primera * su:

$\rho_1^{-1} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$

$\rho_2^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_3^{-1} = \{(1,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_4^{-1} = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

$\rho_5^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,2)\}$

RST
RELACIJA EKVIVALENCIJE

RAT
RELACIJA PORETKA

Osnovne osobine binarne relacije ρ skupa $A \neq \emptyset$:

- **refleksivnost (R)**: $\boxed{(\forall x \in A)}\, x\rho x$

$\forall x \in A,\ (x,x) \in \rho$

$\top \Rightarrow$ BILO ŠTO $\top$, $\perp$

- **simetričnost (S)**: $(\forall x, y \in A)\,(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
- **antisimetričnost (A)**: $(\forall x, y \in A)\,(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$ ili $(\forall x, y \in A)\,((x\rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \rceil\,(y\rho x))$
- **tranzitivnost (T)**: $(\forall x, y, z \in A)\,((x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z)$

$(1,2) \in \rho_1 \wedge (2,1) \in \rho_1$

$\boxed{A = \{1,2,3\}}$

$\rho_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (3,1)\}$ R, ~~S~~, ~~A~~, ~~T~~

$(3,1) \in \rho_1 \wedge (1,3) \notin \rho_1$

$(3,1) \in \rho_1 \wedge (1,2) \in \rho_1$, $(3,2) \notin \rho_1$

$\rho_2 = \{(1,1), (2,2), (3,1), (1,3)\}$ ~~R~~, S, ~~A~~, ~~T~~

$(3,3) \notin \rho_2$

$(3,1) \in \rho_2 \wedge (1,3) \in \rho_2$

$(3,1) \in \rho_2 \wedge (1,3) \in \rho_2$, $(3,3) \notin \rho_2$

$\rho_3 = \{(1,1), (2,2)\}$ ~~R~~, S, A, T

$(3,3) \in \rho_3$

$\rho_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ R, S, A, T

Primer: Ispitati osobine sledećih relacija.

$$\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}, \; A = \{1,2,3\}$$

R S ~~A~~ T

$\rho_2 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}, \quad A = \{1,2,3\}$

~~R~~ ~~S~~ ~~A~~ T

$(1,1) \notin \rho_2$

$(1,2) \in \rho_2$

$(2,1) \notin \rho_2$

$(2,3) \in \rho_2$

$(3,2) \in \rho_2$

$\rho_3 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$, $A = \{1,2,3\}$

$\cancel{R}$ $\quad$ $\cancel{S}$ $\quad$ A $\quad$ $\cancel{T}$

$(2,2) \notin \rho_3$

$(3,2) \in \rho_3$

$(2,3) \notin \rho_3$

$(1,3) \in \rho_3$

$(3,1) \in \rho_3$

$(1,3) \in \rho_3$

$(3,2) \in \rho_3$

$(1,2) \notin \rho_3$

$\rho_4 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\},\ A = \{1,2,3\}$

$\underbrace{(1,3) \in \rho_4 \wedge \underbrace{(3, !)}_{\perp}}_{\perp} \Rightarrow \checkmark$ $\Rightarrow \checkmark$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ A T T

$(1,1) \in \rho_4$

$(2,3) \in \rho_4$

$(3,2) \notin \rho_4$

$$\rho_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\},\ A = \{1,2,3\}$$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ A T

$(3,3) \notin \rho_5$

$(1,2) \in \rho_5$

$(2,1) \notin \rho_5$

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija ekvivalencije (RST)** akko je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primer: relacija jednakosti $=$ na skupu realnih brojeva, relacija paralelnosti $\|$ na skupu svih pravih u prostoru, relacija podudarnosti na skupu svih duži, relacija $\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,4),(4,3),(5,5)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija poretka (RAT)** akko je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Primer: relacije $\leq$ i $\geq$ na skupu prirodnih brojeva, relacija deli $|$ na skupu prirodnih brojeva, relacija

$$\begin{aligned}\rho_2 \quad = \quad & \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(1,4),\\ & (1,5),(2,4),(3,4),(3,5)\}\}\end{aligned}$$

na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....