Logika i skupovi

September 15, 2024

LOGIKA

Iskazi su rečenice za koje se zna da li su tačne ($\top$) ili netačne ($\perp$). Obeležavaju se malim latiničnim slovima: p, q, r, ... koja se nazivaju iskazna slova.

Definicije osnovnih logičkih operacija:

Negacija

$\neg$	
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Konjukcija

i

$\wedge$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Disjunkcija

ILI

$\vee$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$

Implikacija

$\Rightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$

Ekvivalencija

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

$\underbrace{2+3=5}_{\top} \Rightarrow \underbrace{2+3=1}_{\perp}$

$\perp$

$p \Leftrightarrow q$

„p AKO I SAMO AKO q"

p	$\neg$p
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

$\underbrace{2+3=5}_{\top} \Leftrightarrow \underbrace{3+4=7}_{\top}$

$\top$

$\underbrace{2+3=7}_{\perp} \Leftrightarrow \underbrace{3+4=5}_{\perp}$

$\top$

$2+3=5$ ✓

$2+3=7$ ✓

$2+3$ —

$p \wedge q$

„p i q"

$\underbrace{\underbrace{2+3=5}_{\top} \wedge \underbrace{3+4=7}_{\top}}_{\top}$

$\underbrace{\underbrace{2+3=5}_{\top} \wedge \underbrace{3+4=5}_{\perp}}_{\perp}$

$p \Rightarrow q$

„p SLEDI q"

„AKO p ONDA q"

$\underbrace{2+3=1}_{\perp} \Rightarrow \underbrace{2+3=7}_{\perp}$

$\top$

$\underbrace{2+3=1}_{\perp} \Rightarrow \underbrace{2+3=5}_{\top}$

$\top$

$p \vee q$

„p ILI q"

$\underbrace{\underbrace{2+3=1}_{\perp} \vee \underbrace{5+6=3}_{\perp}}_{\perp}$

$$\underbrace{\text{PADA KIŠA}}_{T} \wedge \underbrace{\text{HLADNO JE}}_{T} \Rightarrow \text{IĆI ĆU NA BAZEN DA SE KUPAM}$$

$$\underbrace{T \Rightarrow \bot}_{\bot}$$

$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)\vee(p\vee r)$

Rekurzivna definicija iskazne formule:

1. Iskazne konstante $(\top, \bot)$ i iskazna slova su iskazne formule.
2. Ako su A i B iskazne formule, tada su i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ i $\rceil A$ iskazne formule.
3. Iskazne formule se mogu dobiti samo konačnom primenom 1. i 2.

1) $\top, \bot, p, q, r \ldots$

2, $p\wedge q$, $r \Rightarrow \top$, $\rceil q$ ...

2, $(p\wedge q)\Rightarrow \rceil q$

$p\wedge(r\Rightarrow \top)$

Uobičajeno je da se spoljašnje zagrade ne pišu. Kao i da se uzima da su operacije $\wedge$ i $\vee$ prioritetnije.

Iskazne formule koje su tačne za sve vrednosti iskaznih slova nazivaju se **tautologije**.

$2+3:(4-1)+7$
$=2+3:3+7$
$=2+1+7$
$=10$

$2+3=5 \wedge 3+2=5$

$2+3 = 3+2$

$4\cdot 3:2+7$
$=12:2+7$
$=6+7=13$

Primeri tautologija: $p, q, r \in \{\top, \bot\}$

- komutativnost konjukcije i disjunkcije:
$$p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p$$
$$p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p$$

$p\wedge q \Leftrightarrow q\wedge p$

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$	
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

- asocijativnost konjukcije i disjunkcije:
$$p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$$

$2+(3+5)=(2+3)+5$

$2-(3-5)=(2-3)-5$

$2-(-2) = -1-5$

$4 = -6$

$\bot$

- distributivnost konjukcije prema disjunkciji i disjunkcije prema konjukciji:

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

- zakon isključenja trećeg: $$\begin{aligned} p \wedge \neg p &\Leftrightarrow \perp \\ p \vee \neg p &\Leftrightarrow \top \end{aligned}$$

- zakon kontrapozicije: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

- De Morganovi zakoni: $$\begin{aligned} \neg (p \wedge q) &\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \\ \neg (p \vee q) &\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

- zakon uklanjanja dvojne negacije: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

$2 \cdot (3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$

$2 \cdot 8 = 6 + 10$

$\top$

$2 + (3 \cdot 5) = (2+3) \cdot (2+5)$

$2 + 15 = 5 \cdot 7$

$17 = 35$

$\perp$

$p \Rightarrow \neg q$

$\neg q \Rightarrow \neg p$

Za iskazivanje tvrđenja osim logičkih operacija, potrebni su i **logički kvantifikatori** $\forall$ (za svako) i $\exists$ (postoji).

- $(\forall x)\,\alpha(x)$: "za svako x tačno je $\alpha(x)$"
- $(\exists x)\,\alpha(x)$: "postoji x tako da važi $\alpha(x)$"

$\exists x \in \mathbb{R},\ X + 3 = 5$

$\forall x \in \mathbb{N},\ x > 0$

$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x = 1 \wedge x = -1$

Primer:

- $(\forall x \in \mathbb{R})\left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\right)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x + 2 = 5)$

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$x + 2 = 5$

$x = 3$

Ako ispred x nije napisan nijedan kvantifikator tada se podrazumeva da stoji $\forall$.
Takođe se u svim definicijama podrazumeva ako i samo ako što će skraćeno biti zapisivano sa akko.

$\exists!$

$\uparrow$

POSTOJI SAMO JEDNO

$x + 3 > 0$

$x > -3$

$p \Leftrightarrow q$

$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$

$\top \quad \bot \quad \bot \quad \top$

$a) \Leftrightarrow b)$

1, $a) \Rightarrow b)$,

2, $b) \Rightarrow a)$,

SKUPOVI

$x \in S$

$x \notin S$

$\neg(x \in S)$

Skup je osnovni pojam koji se ne definiše.
Skupovi se obeležavaju sa A, B, C, ..., a elementi skupa sa a, b, c, ...

Činjenica da je x elemenat skupa S obeležava se sa: $x \in S$ i čita x pripada skupu S, a činjenica da x nije elemenat skupa S obeležava se sa: $x \notin S$ i čita x ne pripada skupu S.

Konačan skup se može definisati nabrajanjem elemenata. $D = \{\star, \heartsuit, 0, \square\}$

Primer: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ili $B = \{a, b\}$ ili $C = \{\bullet, \circ, ◐, ◑\}$.

Ako je skup S beskonačan, tada se mora pronaći neka osobina π koju imaju elementi skupa S, a koju nema nijedan element koji ne pripada skupu S. Neka $\pi(x)$ znači da x zadovoljava uslov π tada se skup S zapisuje sa $S = \{x | \pi(x)\}$. Ovaj način zapisivanja skupova se može koristiti i za konačne skupove.

Primer: $A = \{x | x < 5 \wedge x \in \mathbb{N}\}$ ili $S = \{x | 2x - 3 = 0\} = \{\frac{3}{2}\}$

$IT = \{$ skup svih studenata inženje.... $\}$

$A = \{IT, IN, BI, EM\}$

Skup koji nema elemenata zove se **prazan skup** i obeležava se sa $\emptyset$ ili $\{\}$.
Napomena: $\{\emptyset\}$ - nije prazan skup već skup koji sadrži jedan elemenat (prazan skup).

$\emptyset$

$\{\emptyset\}$

$\uparrow$ NIJE PRAZAN SKUP

Skup kome pripadaju svi elementi svih skupova koje posmatramo zove se **univerzalni skup** i obeležava sa $\mathcal{U}$.

Redosled elemenata u skupu nije važan, tj. $\{a, b\} = \{b, a\}$.
U skupu$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata podrazumeva se da su svi elementi tog skupa međusobno različiti.

Kardinalni broj skupa A, je broj elemenata koji pripadaju skupu A, i obeležava se sa $Card\,(A)$. $|A|$, $\#A$

$\{\{1\}\}$

Primer: $A = \{0, 1\} \Rightarrow Card\,(A) = 2$

$\{1, 2\} = \{2, 1\}$

$\{1, \cancel{1, 1, 1,} 2\} = \{1, 2\}$

Skupovne relacije i operacije se definišu preko odgovarajućih logičkih operacija:

- **jednakost** skupova: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(\underbrace{x \in A \Leftrightarrow x \in B}_{\top})$
- skupovna **inkluzija** (podskup):
  $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

  pravi podskup: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

  Za svaki skup A važi: $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$.
- **unija** skupova: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- **presek** skupova: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

  Skupovi su disjunktni ako je njihov presek prazan skup, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.
- **komplement** skupa: $\overline{A} = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$
- **razlika** skupova: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- **simetrična razlika** skupova:
  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

A

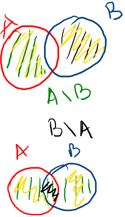
$\emptyset \subseteq A$

$\underbrace{x \in \emptyset}_{\perp} \Rightarrow x \in A$

$\perp \Rightarrow ?$

$\top$

$A \subseteq A$



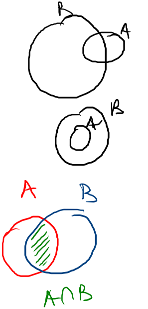
$\{1,2\} \neq \{a,b\}$

$\{1,2\} = \{2,1\}$

$A \subseteq A$

$A \subseteq B$

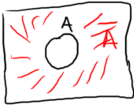
$A \subset B$



$\mathbb{N}$

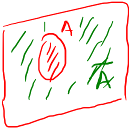
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\}$

$\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$



Osobine skupovnih operacija:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad A \cap \mathcal{U} = A$ $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\quad \overline{\overline{A}} = A$
  $A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\quad A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
- zakon komutativnosti: $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$
- zakon asocijativnosti: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- zakon distributivnosti: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- zakon idempotentnosti: $A \cap A = A$
  $A \cup A = A$
- zakon apsorpcije: $A \cap (A \cup B) = A$
  $A \cup (A \cap B) = A$
- De Morganovi zakoni: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



Partitivni skup, skupa A, je skup svih podskupova skupa A, tj. $\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$.

Napomena: $\emptyset$ i A su uvek elementi skupa $\mathcal{P}(A)$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\cancel{\emptyset}, \{1\}, \{2\}, \{3\} \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

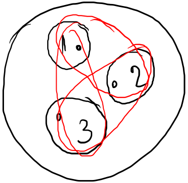
NE SADRŽI PRAZAN SKUP

Particija skupa A, je skup nepraznih podskupova skupa A, od kojih su svaka dva disjunktna, a njihova unija je skup A.

PRESEK JE PRAZAN SKUP

$\{\{1\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
Sve particije skupa A su $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{1, 2, 3\}$.



$A = \{a, b, c\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
$B = \{\square, \circ\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, B, \{\square\}, \{\circ\}\}$

Primer 1: Dati su skupovi

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{2, 4, 6\}$

Odrediti: $Card\,(A)$, $Card\,(B)$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}\,(B)$ i sve particije skupa B.

$Card(A) = 5$

$Card(B) = 3$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{2, 4\}$

$A \setminus B = \{1, 3, 5\}$

$B \setminus A = \{6\}$

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}\}$

$Card\,(\mathcal{P}(B)) = 8 = 2^3$

PARTICIJE

$\{\{2\}, \{4\}, \{6\}\}$

$\{\{2\}, \{4,6\}\}$

$\{\{4\}, \{2,6\}\}$

$\{\{6\}, \{2,4\}\}$

$\{\{2,4,6\}\}$

$x \mid 8 \Leftrightarrow x$ deli 8

Primer 2: Dati su skupovi

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 8\}$ $= \{1, 2, 4, 8\}$

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 2\}$ $= \{1, 2\}$

Odrediti: $Card\,(A)$, $Card\,(B)$, $Card\,(B)$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $\mathcal{P}\,(C)$ i sve particije skupa C.

$Card(A) = 4$

$Card(B) = 4$

$Card(C) = 2$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$

$A \cup C = A$ jer je $C \subseteq A$

$B \cup C = B$

$A \cap B = \{1, 2, 4\}$

$A \cap C = C$

$B \cap C = C$

$A \setminus B = \{3\}$

$A \setminus C = \{3, 4\}$

$B \setminus A = \{8\}$

$B \setminus C = \{4, 8\}$

$C \setminus A = \emptyset$

$C \setminus B = \emptyset$

$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, C, \{1\}, \{2\}\}$ $2^2 = 4$

PARTICIJE: $\{\{1\}, \{2\}\}$

$\{\{1, 2\}\}$

$\mathbb{N} = \{1,2,3\ldots\}$ $\quad$ $\mathbb{N}\cup\{0\} = \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3\ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p\in\mathbb{Z} \wedge q\in\mathbb{N}\}$

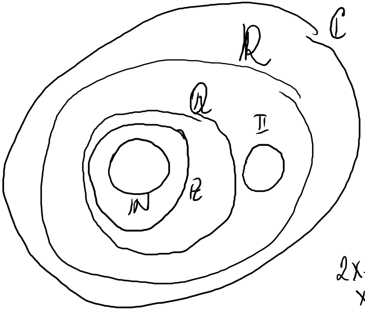
$\mathbb{I}$ - ONI KOJI SE NE MOGU NAPISATI U OBLIKU RAZLOMKA

$\sqrt{2}, \pi, \sqrt{3}, \ldots$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$

$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R},\ \underline{i^2=-1}\}$

$5 = 5+0i$



$2x+4=5$

$x=\frac{1}{2}$

$\boxed{1}$

$x^2+1=0$

$3x=7$

$\mathbb{N}$ - NEMA REŠENJE

$\mathbb{Z}$ - -||-

$\mathbb{Q}$ $\quad x=\frac{7}{3}$

R, C