Kvadratna funkcija. Kvadratne jednačine i nejednačine.

16. септембар 2024.

Kvadratna jednačina je jednačina oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

Reenja ove jednačine su:

1. za $b = c = 0$, $ax^2 = 0$ pa je $x_1 = x_2 = 0$;
2. za $b = 0$, $c \neq 0$, $ax^2 + c = 0$ pa je $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;
3. za $b \neq 0$, $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ pa je $x_1 = 0$, a $x_2 = -\frac{b}{a}$;
4. za $b \neq 0$, $c \neq 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ pa je

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$, onda važi
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Izraz $D = b^2 - 4ac$ naziva se diskriminanta kvadratne jednačine i za njega važi sledeće:

1. ako je $D > 0$, kvadratna jednačina ima dva različita realna rešenja;
2. ako je $D = 0$, kvadratna jednačina ima dva jednaka realna rešenja;
3. ako je $D < 0$, kvadratna jednačina ima konjugovano kompleksna rešenja.

Primer 1: Rešiti jednačine:

1. $-6x^2 + x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{-12} = \frac{-1 \pm 7}{-12} = \begin{cases} \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-6x^2 + x + 2 = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

2. $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$$

3. $x^2 - 4x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$= 2 \pm i$$

4. $4x^2 - 1 = 0$

$4x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_2 = -\frac{1}{2}$

5. $3x^2 - 2x = 0$

$x(3x-2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 3x - 2 = 0$

$\boxed{x_1 = 0} \qquad \boxed{x_2 = \frac{2}{3}}$

Primer 2: Rešiti jednačine:

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{30} = \frac{1}{x-1}$ $\quad / \cdot 30x(x-1)$

uslovi:

$x \neq 0$

$x \neq 1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$\frac{30+x}{30x} = \frac{1}{x-1}$$

$$(30+x)(x-1) = 30x$$

$$\cancel{30x} - 30 + x^2 - x = \cancel{30x}$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

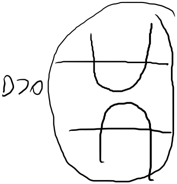
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} = \begin{cases} 6 & \checkmark \\ -5 & \checkmark \end{cases}$$

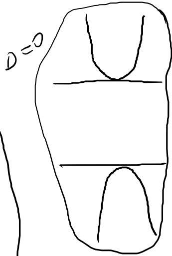
1.1 $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{8}{x^2-4}$

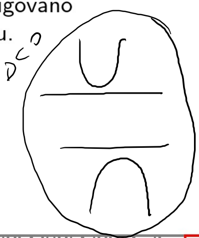
Kvadratna funkcija je funkcija oblika $y = ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.
Grafik kvadratne funkcije je parabola.

- Preseci parabole sa x-osom su nule kvadratne funkcije, a izračunavaju se kao rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$.
- Broj realnih nula zavisi od diskriminante $D = b^2 - 4ac$:

1. ako je $D > 0$, kvadratna funkcija ima dve realne i različit nule, tj. parabola ima dve presečne tačke sa x-osom;
2. ako je $D = 0$, kvadratna funkcija ima jednu realnu nulu, tj. parabola dodiruje x-osu u jednoj tački;
3. ako je $D < 0$, kvadratna funkcija za nule ima konjugovano kompleksni par brojeva, pa parabola neće seći x-osu.

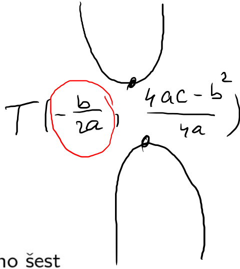




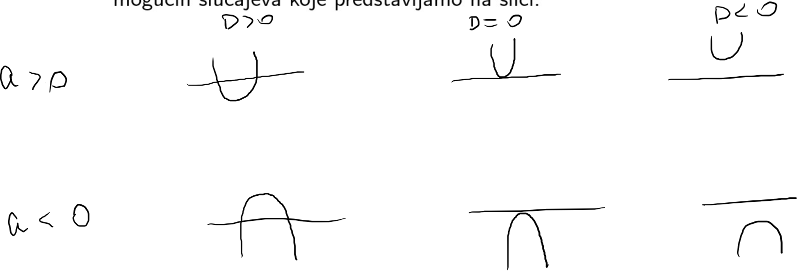


- Pored diskriminante, oblik parabole je uslovljen i vodećim koeficijentom a :

1. ako je $a > 0$, kvadratna funkcija ima minimum u tački $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$;
2. ako je $a < 0$, kvadratna funkcija ima maksimum u tački $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.



Dakle, u zavisnosti od diskriminante i vodećeg koeficijenta a imamo šest mogućih slučajeva koje predstavljamo na slici:

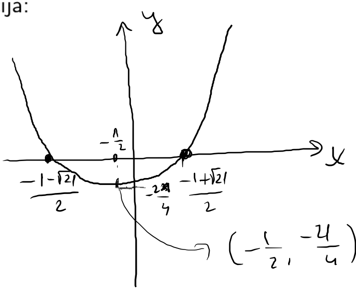


Primer 3: Skicirati frafike sledećih kvadratnih funkcija:

1. $y = x^2 + x - 5$

$$y=0 \qquad x^2+x-5=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+20}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} = x_1 \\ \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} = x_2 \end{cases}$$



I $$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{-1+\sqrt{21}}{2} + \frac{-1-\sqrt{21}}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 5 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 5 = \frac{1-2-20}{4} = \frac{-21}{4}$$

II $$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

$$T\left(-\frac{1}{2}, \frac{-21}{4}\right)$$

III $$y' = 2x+1$$

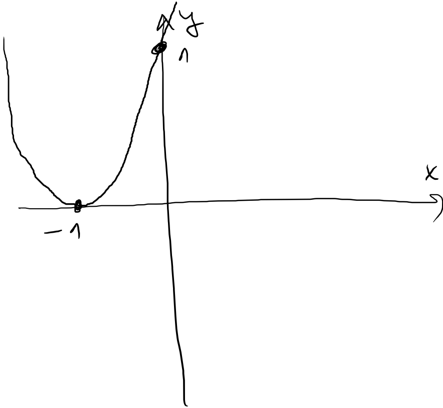
$$y'=0 \qquad 2x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

2. $y = x^2 + 2x + 1 \quad = (x+1)^2$

$x_1 = x_2 = -1$

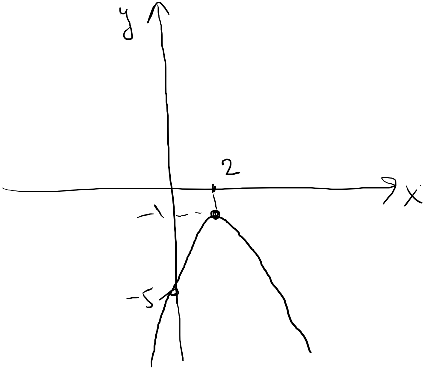
$x = 0 \longrightarrow y = 1$



3. $y = -x^2 + 4x - 5$

$y=0$ $\quad -x^2+4x-5=0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{-2} = \frac{-4 \pm 2i}{-2} = 2 \pm i$$



I $\quad x=0 \quad y=-5$

$T\left(-\frac{b}{2a}, \_\right)$

$-\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$

$y(2) = -4+8-5$
$= -1$

II $\quad y' = -2x+4$

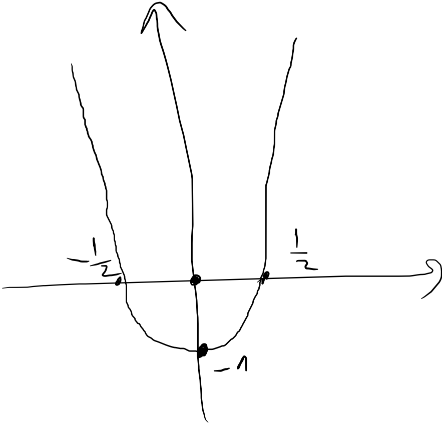
$y'=0 \quad -2x+4=0$

$x=2$

4. $y = 4x^2 - 1$

$y = 0$

$$4x^2 - 1 = 0$$
$$4x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{1}{4}$$
$$x = \pm \frac{1}{2}$$



$$\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 0$$

$$y(0) = -1$$

5. $y = 3x^2 - 2x$

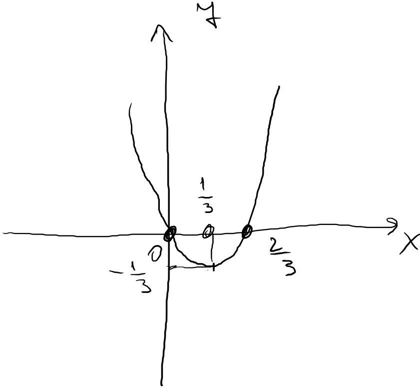
$y = 0$ $\quad 3x^2 - 2x = 0$

$x(3x - 2) = 0$

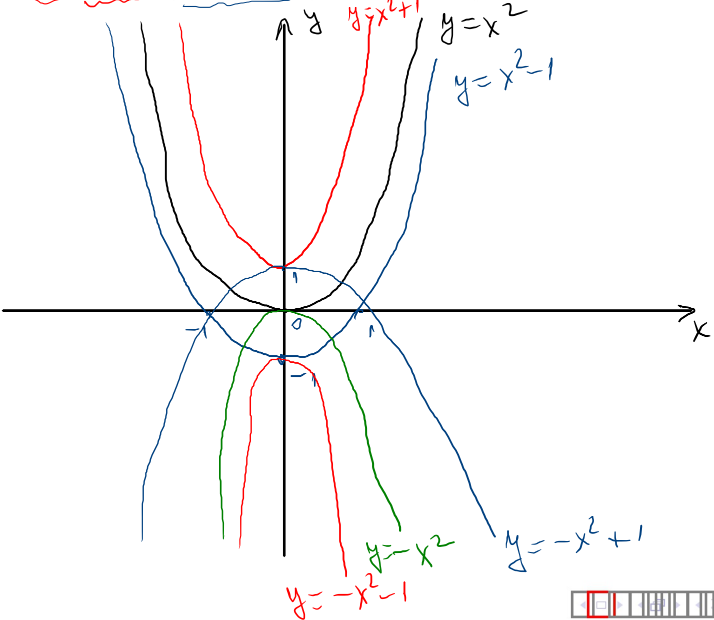
$\boxed{x = 0}$ $\quad 3x - 2 = 0$

$\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$y\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{\cancel{9}\ 3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$



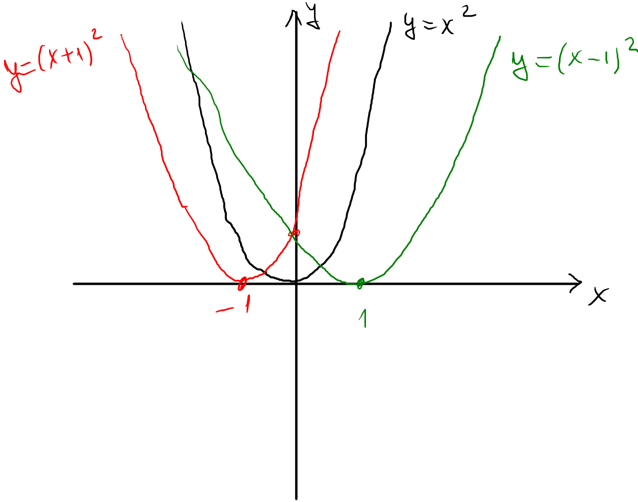
Primer 4: Na istom grafiku skicirati frafike kvadratnih funkcija $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 - 1$ i $y = -x^2 + 1$.



$y = x^2$

$y = (x+1)^2$

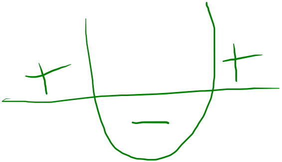
$y = (x-1)^2$

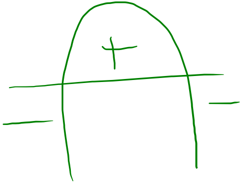


Kvadratna nejednačina je nejednačina oblika

$$ax^2+bx+c > 0, \quad ax^2+bx+c < 0, \quad ax^2+bx+c \geq 0 \quad \text{ili} \quad ax^2+bx+c \leq 0$$

gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.
Ona se rešava pomoću grafika kvadratne funkcije.



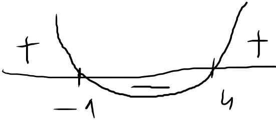


Primer 5: Rešiti nejednačine:

1. $x^2 - 3x - 4 < 0$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

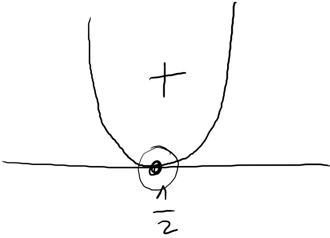


$$x \in (-1, 4)$$

2. $4x^2 - 4x + 1 > 0$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$



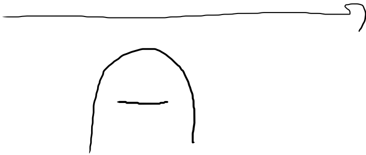
$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

3. $-2x^2 - x - 3 > 0$

$$-2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{-4} \notin \mathbb{R}$$

$$x \in \emptyset$$



Primer 6: Rešiti nejednačine:

1. $\dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x - 8} \geq 0$

2. $\frac{x^2-1}{x^2+x+1} < 1$

$$\frac{x^2-1}{x^2+x+1} - 1 < 0$$

$$\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}-x-1}{x^2+x+1} < 0$$

$$\frac{-x-2}{x^2+x+1} < 0$$

$x^2+x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$-x-2 < 0$$

$$-x < 2$$

$$x > -2$$

$$x \in (-2, \infty)$$

$$/(x^2+x+1) > 0$$

$$\cancel{x^2}-1 < \cancel{x^2}+x+1$$

$$x > -2$$

усл: $x^2+x+1 \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$0^2+0+1 = 1 > 0$$

3. $\dfrac{3x^2+6x-9}{2x+1} \geq x+1$

$$\frac{3x^2+6x-9}{2x+1} - x - 1 \geqslant 0$$

$$\frac{3x^2+6x-9-2x^2-x-2x-1}{2x+1} \geqslant 0$$

$$\frac{x^2+3x-10}{2x+1} \geqslant 0$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3\pm 7}{2} < \begin{matrix} 2 \\ -5 \end{matrix}$$

услов: $2x+1 \neq 0$

$x \neq -\frac{1}{2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

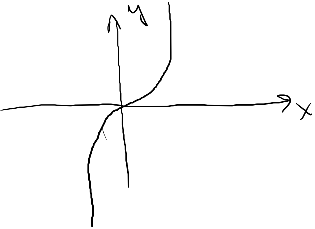
$$\frac{(x-2)(x+5)}{2x+1} \geqslant 0$$

		-5		$-\frac{1}{2}$		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	•	$+$
$x+5$	$-$	•	$+$		$+$		$+$
$2x+1$	$-$		$-$	o	$+$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

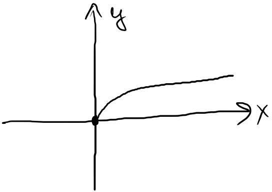
$x \in [-5, -\frac{1}{2}) \cup [2, +\infty)$

		-5		$-\frac{1}{2}$		2	
$x^2+3x-10$	$+$	o	$-$		$-$	o	$+$
$2x+1$	$-$		$-$	o	$+$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

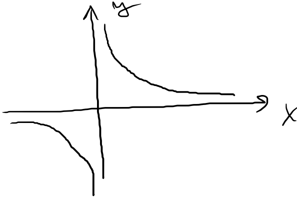
$y = x^3$



$y = \sqrt{x}$



$y = \frac{1}{x}$



$y = \frac{1}{x^2}$