Funkcije

September 15, 2024

Funkcije

September 15, 2024

Funkcija $f \subseteq A \times B$ je binarna relacija kod koje ne postoje dva različita uređena para sa jednakim prvim komponentama, tj. za koju važi

$\rho = \{(1,2),(1,3)\}$

NIJE FUNKCIJA

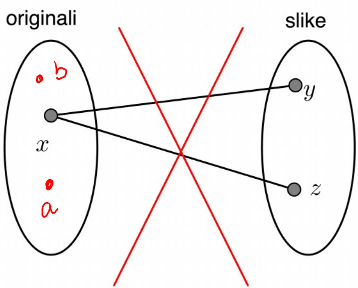
$$\forall x, y, z, \ ((x, y) \in f \ \wedge \ (x, z) \in f \Longrightarrow y = z) \, .$$

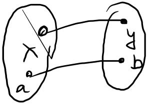
$(x,y) \in \sin$

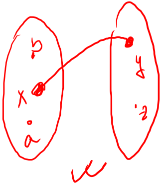
$\sin x = y$

$(x,y) = {}^{2}$

$y = x^2$







JESTE FUNKCIJA

Uobičajeno je da se umesto $(x, y) \in f$ piše $y = f(x)$.

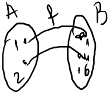
Neka su A i B dva neprazna skupa.
Funkcija f **iz skupa** A **u skup** B, u oznaci $\boxed{f : A \longrightarrow B}$, je ona funkcija kod koje je svakom elementu skupa A pridružen samo jedan elemenat skupa B.

$A = \{1, 2\}$

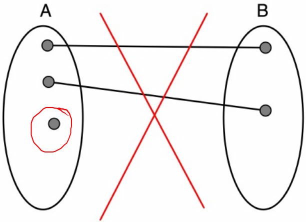
$B = \{1, 4, 6\}$

$f : A \to B$ ✓

$f = \{(1,1), (2,4)\}$



$f(x) = x^2$ $\forall x \in A$



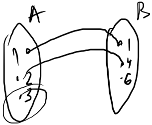
- ovo jeste funkcija
ali nije funkcija A→B

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 4, 6\}$

$\cancel{f : A \to B}$ jeste funkcija

$f = \{(1,1), (2,4)\}$



Nadalje će biti reći samo o funkcijama skupa A u skup B.

Neka je $f : A \longrightarrow B$. Tada se kaže da je

x	$f(x)$
original od $f(x)$	slika od x
nezavisna promenljiva	zavisna promenljiva
argument funkcije	vrednost funkcije

skup A	skup B
oblast definisanosti	skup vrednosti
domen	kodomen
$D(f)$	$K(f)$

$f(x)$

$\frac{\ln \cancel{x}}{\cancel{x}}$

D

0

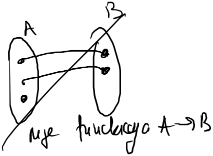
$\ln x = f(x)$

ln

Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **sirjektivna, ("na")**, što se označava sa $f : A \xrightarrow{\text{"na"}} B$, ako je svaki elemenat skupa B slika nekog elementa iz skupa A,
Dakle,

$$f : A \xrightarrow{\text{"na"}} B \text{ ako } (\forall y \in B)(\exists x \in A)\, y = f(x).$$

$f(\ ) = -3$

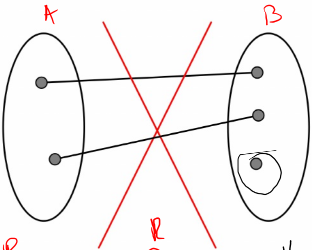


$f(x) = x^2$

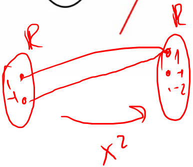
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = -1$

NIJE NA



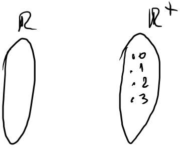
- jeste funkcija f:A ⟶ B, ali nije "na"



$\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$

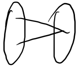
$f(x) = x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ jeste na



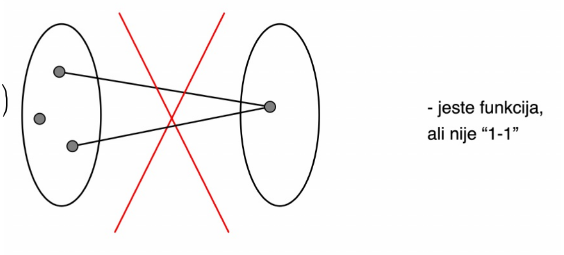
Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **injektivna ("1-1")** što se označava sa $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$, ako se svaki elemenat iz skupa A preslika u različit elemenat skupa B.
Dakle,

$$f \text{ je injektivna funkcija ako } (\forall x, y \in A)\,(f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)\,.$$

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

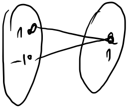
$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$



$f(x) = x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(1) = f(-1) = 1$



Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **bijektivna** ako je u isto vreme sirjektivna i injektivna.

- Za funkciju f kaže se da je funkcija **realne promenljive** ako je njen domen podskup skupa realnih brojeva, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$.
- Za funkciju kažemo da je **realna** ako je njen kodomen podskup skupa realnih brojeva, $K(f) \subseteq \mathbb{R}$.
- Prirodni domen (prirodna oblast definisanosti) za realne funkcije realne promenljive zadate formulom sastoji se od svih realnih brojeva za koje je izraz definisan.

NEZAVISNE PROMENLJIVE

$f: A \to B$

$A \subseteq \mathbb{R}$

$B \subseteq \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$f: \{1,2\} \to \{1,4\}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Primer: Odrediti prirodni domen funkcija:

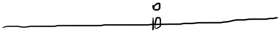
1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{(x^2+1)(x+2)(x-3)}$

3) $x^2+1 \neq 0 \wedge x+2 \neq 0 \wedge x-3 \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 3$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

$= (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$



1) $x \neq 0 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2) $\boxed{1 - x^2 \geq 0}$

$x^2 \leq 1$

$\cancel{x \leq 1} \qquad \cancel{x \leq \pm 1}$

$D = [-1, 1]$

I $\quad 1 - x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$x \in [-1, 1]$

II $\quad 1 - x^2 \geq 0$

$(1-x)(1+x) \geq 0$

		-1		1	
$1-x$	+		+		−
$1+x$	−		+		+
$1-x^2$	−		+		−

Neka su date funkcije $f : A \longrightarrow B$ i $g : C \longrightarrow D$. Kaže se da je funkcija f **jednaka** funkciji g i piše $f = g$ ako je:

1. $A = C$;
2. $B = D$;
3. $(\forall x \in A)\,(f\,(x) = g\,(x))$, tj. f i g imaju sve vrednosti jednake.

Primer: Da li su funkcije $g\,(x) = \dfrac{x}{x}$ i $f\,(x) = 1$ jednake?

$$g(x) = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

$$f(x) = 1$$

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{1\}$$

$$f : \mathbb{R} \to \{1\}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) \neq g(x)$$

Primer: Da li su jednake funkcije f i g, definisane na prirodnom domenu?

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} - 3$, $g(x) = x - 2$

1, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{x+1}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\qquad f(x) \neq g(x)$

2, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} - 3 = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} - 3 = x+1-3 = x-2$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$g(x) = x - 2$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$

$f(x) \neq g(x)$

ZA $\circ$

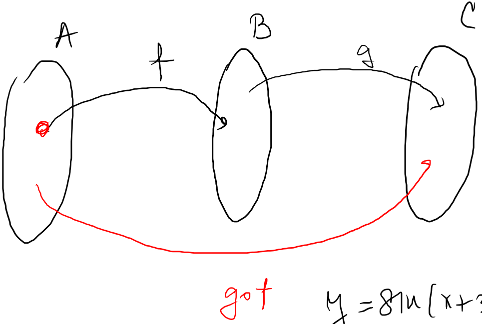
- KOMUTATIVNOST NE VAŽI
- ASOCIJATIVNOST VAŽI

$\mathbb{R}$ $\qquad$ $B \subseteq \mathbb{R}$

Neka su A, B i C neprazni skupovi i neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ date funkcije. Funkcija $g \circ f : A \longrightarrow C$ definisana sa

$$(\forall x \in A)\, \underline{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

zove se **kompozicija** funkcija f i g.



$y = \sin(x+3)$

$f(x) = x + 2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)^2$$

Primer: Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa

$$f(x) = x^3 + 1 \quad \text{i} \quad g(x) = 2x,$$

odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ i $g \circ g$.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^3 + 1 = 8x^3 + 1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^3+1) = 2(x^3+1)$

$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x^3+1) = (x^3+1)^3 + 1$

$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(2x) = 2(2x) = 4x$

$f(a) = a^3 + 1$

$f(b) = b^3 + 1$

$f(a+b) = (a+b)^3 + 1$

Primer: Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa

$$f(x) = 1 - 3x \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{3},$$

odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ i $g \circ g$.

$$f \circ g \neq g \circ f$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^2-1}{3}\right) = 1 - \cancel{3} \cdot \frac{x^2-1}{\cancel{3}} = \underline{2 + x^2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(1-3x) = \boxed{\frac{(1-3x)^2-1}{3}}$$

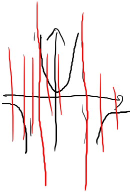
$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1-3x) = 1 - 3(1-3x) = -2 + 9x$$

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x^2-1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{x^2-1}{3}\right)^2 - 1}{3}$$

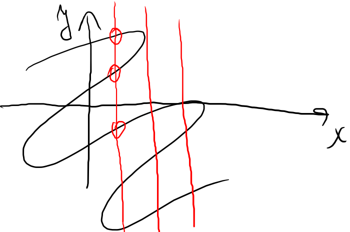
Relacija koja je zadata grafički je funkcija akko svaka prava paralelna sa y-osom seče dati grafik u najviše jednoj tački.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je injektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima najviše jedan presek sa grafikom funkcije.

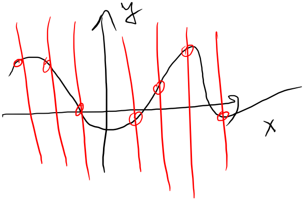
Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je sirjektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima bar jedan presek sa grafikom funkcije.



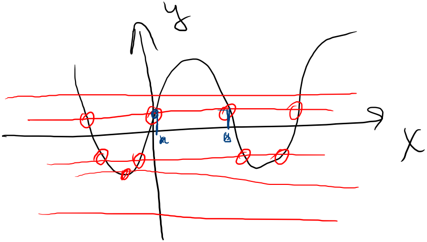
Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je bijektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima tačno jedan presek sa grafikom funkcije.



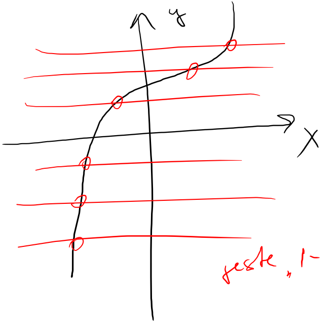
NIJE FUNKCIJA



JESTE FUNKCIJA

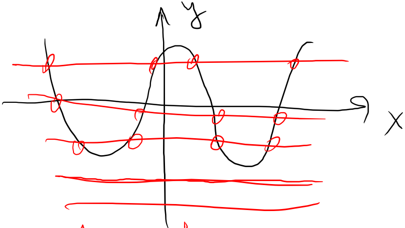


nie „1-1"

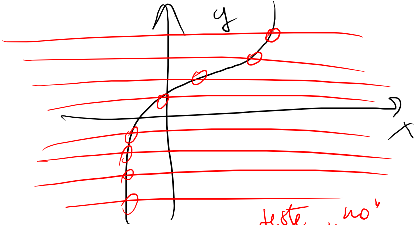


jest „1-1"

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



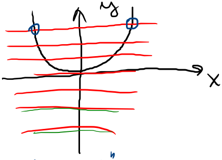
nie „na"



jest „na"

$\boxed{f(x)=x^2}$:

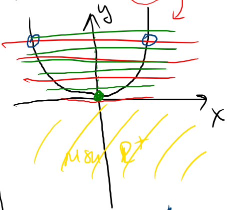
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



nije „1-1"

nije „na"

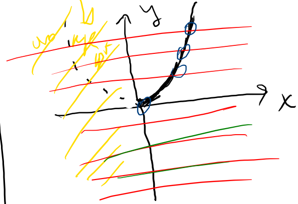
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$



nije „1-1"

jeste „na"

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$



jeste „1-1"

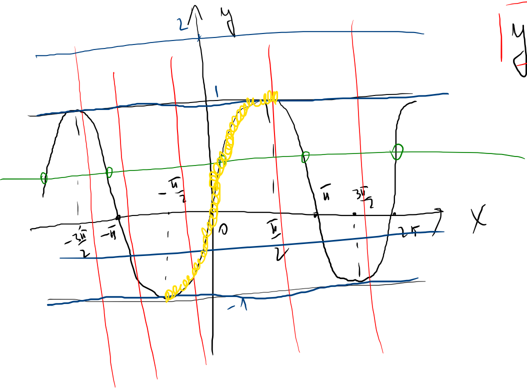
nije „na"

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

jeste „1-1"

jeste „na"

$$\boxed{y = \sin x}$$



$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

није „1-1"

није „на"

$y: \mathbb{R} \to [-1,1]$

није „1-1"

јесте „на"

$y: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

јесте „1-1"

јесте „на"

Ako je $f : A \longrightarrow B$ bijekcija onda se može definisati funkcija $g : B \longrightarrow A$ tako da važi

$$f(g(y)) = y, \qquad \forall y \in B$$

$$g(f(x)) = x, \qquad \forall x \in A$$

Funkcija g naziva se inverzna funkcija funkcije f i označava sa f^{-1}.

$$f \circ f^{-1} = i_B \qquad f^{-1} \circ f = i_A$$

$i_B : B \longrightarrow B$, $i_B(b) = b$, $\forall b \in B$
$i_A : A \longrightarrow A$, $i_A(a) = a$, $\forall a \in A$
su identičke funkcije skupova A i B.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$

$g(x) = \sqrt[3]{x}$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = x$

$g \circ f(x) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$

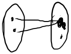
$f(x) = x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\boxed{y = x}$

$f(2) = 2$

$f(5) = 5$



Primer: Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa

$$\boxed{f(x) = x^3 + 1} \quad \text{i} \quad g(x) = 2x,$$

odrediti: f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

DA LI JE f BIJEKCIJA ?

1, DA LI JE „1-1" ?

$$\boxed{f(x)=f(y) \Rightarrow x=y}$$

$$f(x)=f(y) \Rightarrow x^3+\cancel{1} = y^3+\cancel{1}$$
$$\Rightarrow x^3=y^3$$
$$\Rightarrow x=y$$

2, DA LI JE „NA" ?

$$\boxed{\forall y\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, \ f(x)=y}$$

$f(x)=y$

$x^3+1=y$

$x^3=y-1$

$x=\sqrt[3]{y-1}$

$\forall y\in\mathbb{R}, \ \exists x=\sqrt[3]{y-1}\in\mathbb{R}, \ f(x)=f(\sqrt[3]{y-1}) = (\sqrt[3]{y-1})^3+1 = y$

$\Rightarrow f$ jeste bijekcija $\Rightarrow \exists f^{-1}$

$$f^{-1}(f(x))=x$$
$$f^{-1}(\underbrace{x^3+1}_{t})=x$$

$x^3+1=t$

$x^3=t-1$

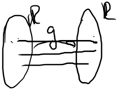
$x=\sqrt[3]{t-1}$

$$f^{-1}(t)=\sqrt[3]{t-1}$$
$$\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}}$$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = 2x$

DA LI JE g BIJEKTIVNA ?

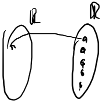
1) DA LI JE „1-1" ?



$$\boxed{g(x) = g(y) \to x = y} \ ?$$

$$g(x) = g(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

2) DA LI JE „NA" ?



$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y} \ ?$$

$$f(x) = y$$

$$2x = y$$

$$x = \frac{y}{2}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ \exists x = \frac{y}{2} \in \mathbb{R}, \ f(x) = f\left(\frac{y}{2}\right) = 2\,\frac{y}{2} = y$$

$\Rightarrow$ JESTE BIJEKCIJA

$\Rightarrow \exists g^{-1}$

$$g^{-1}(g(x)) = x$$

$$g^{-1}(\underbrace{2x}_{t}) = x$$

$$\boxed{g^{-1}(x) = \frac{x}{2}}$$

$$2x = t$$

$$x = \frac{t}{2}$$

$$g^{-1}(t) = \frac{t}{2}$$

Primer: Za funkcije $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definisane sa

$$\boxed{f(x)=1-3x} \quad \text{i} \quad g(x)=\frac{x^2-1}{3},$$

odrediti: f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

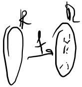
DA LI JE BIJEKCIJA?

1. DA LI JE „1-1"?

$$\boxed{f(x)=f(y)\Rightarrow x=y}$$

$$f(x)=f(y)\Rightarrow 1-3x=1-3y$$
$$\Rightarrow -3x=-3y$$
$$\Rightarrow x=y$$

2. DA LI JE „NA"?



$$\boxed{\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R}, f(x)=y}$$

$$f(x)=y$$
$$1-3x=y$$
$$-3x=y-1$$
$$\boxed{x=\frac{1-y}{3}}$$

$$\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x=\frac{1-y}{3}\in\mathbb{R},\ f(x)=f\left(\frac{1-y}{3}\right)=y$$

$\Rightarrow$ JESTE BIJEKCIJA

$$f^{-1}(f(x))=x$$
$$f^{-1}(\underbrace{1-3x}_{t})=x$$

$$1-3x=t$$
$$-3x=t-1$$
$$x=\frac{1-t}{3}$$

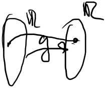
$$f^{-1}(t)=\frac{1-t}{3}$$

$$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{1-x}{3}}$$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^2-1}{3}$

DA LI JE BIJEKCIJA ?

1, DA LI JE „1-1" ?



$$\boxed{g(x)=g(y) \Rightarrow x=y}$$

$$g(x)=g(y) \Rightarrow \frac{x^2-1}{\cancel{3}} = \frac{y^2-1}{\cancel{3}}$$

$$\Rightarrow x^2 \cancel{-1} = y^2 \cancel{-1}$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2$$

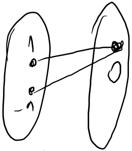
$$\Rightarrow x=y \;\land\; \boxed{x=-y}$$

NIJE „1-1"

$$g(1) = \frac{1-1}{3} = 0$$

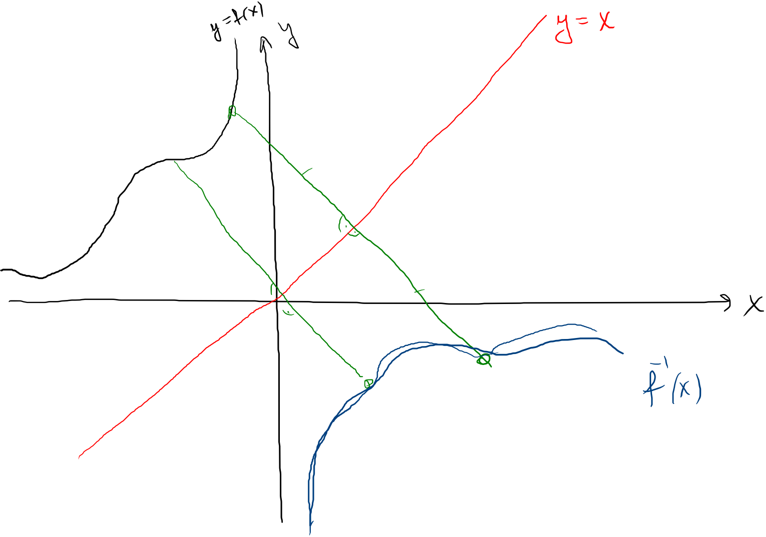
$$g(-1) = \frac{(-1)^2-1}{3} = \frac{1-1}{3} = 0$$

$$\boxed{g(1) = g(-1)}$$



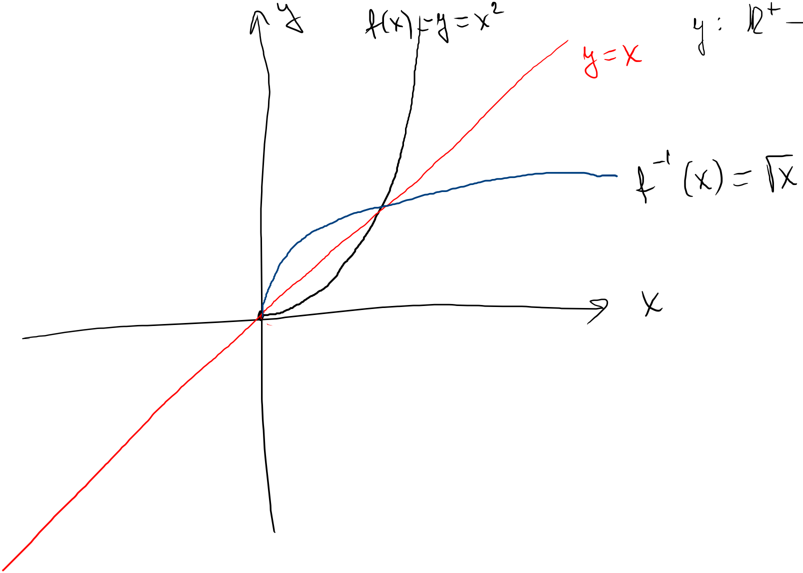
NIJE BIJEKCIJA

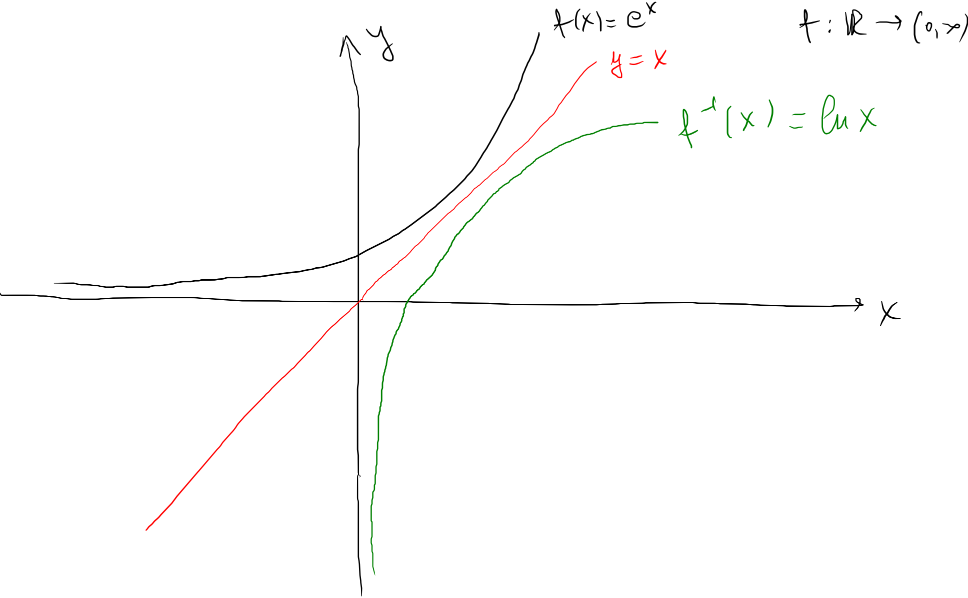
$\Rightarrow$ NEMA INVERZNU FUNKCIJU



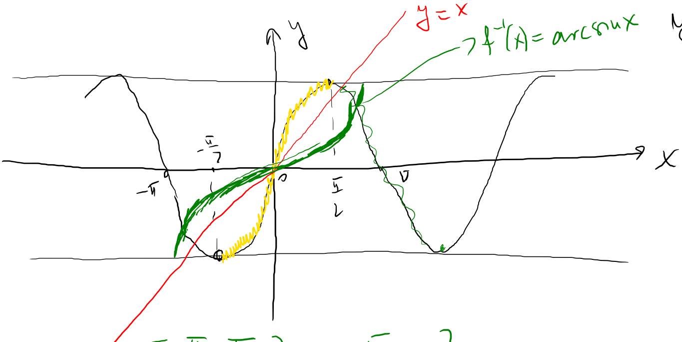
y = f(x)
y
y = x
x
f⁻¹(x)

$y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$





$f(x) = e^x$
$f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$
y
$y = x$
$f^{-1}(x) = \ln x$
x



$y = \sin x$

$y : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

$\arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$