Slobodni vektori

April 27, 2024

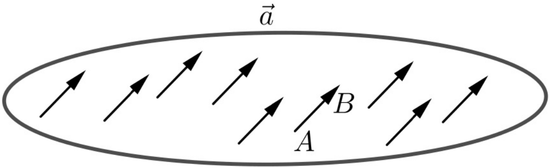
Slobodni nenula vektor je skup svih orijentisanih duži koje su međusobno podudarne, paralelne i isto orijentisane. Svaka od tih orijentisanih duži jeste jedan predstavnik tog slobodnog vektora i zove se **vektor**.

Slobodni nula vektor je skup svih nultih duži.

Slobodni vektori se obeležavaju sa $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

Vektor čija je početna tačka A, a krajnja B obeležava se sa $\overrightarrow{AB}$.

Kako je svaki slobodni vektor jednoznačno određen sa bilo kojim svojim predstavnikom, tj. vektorom, uobičajeno je da se poistovete pojam slobodnog vektora i vektora i piše se $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



Svaki vektror $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je određen svojim pravcem, smerom i intenzitetom.

Pravac vektora $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je određen pravom na kojoj leži taj vektor.

Intenzitet vektora $\overrightarrow{AB}$ je dužina duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$.

Smer vektora $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je od tačke A do tačke B.

Vektor čiji je intenzitet jednak jedan naziva se **jedinični vektor**.

Ako se $A \equiv B$, onda je $\overrightarrow{AB}$ nula vektor, u oznaci $\overrightarrow{0}$ ili samo 0. Intenzitet nula vektora je 0, a pravac i smer se ne definišu.

Nenula vektori su jednaki ako su im jednaki pravac, smer i intenzitet.

Sabiranje vektora

Za bilo koje tri tačke važi:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

1. U paralelogramu $ABCD$ izraziti vektore $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$ preko vektora $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CD}$.

2. Neka je $ABCDEF$ pravilan šestougao, O njegov centar, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{FA}$. Izraziti preko vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ vektore $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{EF}$.

3. Neka je $ABCDEF$ pravilan šestougao, P i Q sredine stranica BC i EF, redom. U zavisnosti od vektora $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{FE}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ izraziti vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{DQ}$ i $\overrightarrow{FP}$.

4. Ako su D, E i F redom sredine stranica BC, CA i AB trougla ABC, dokazati jednakosti:
   4.1 $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{FC}$;
   4.2 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$.

5. U četvorouglu $ABCD$ tačke M, P, N i Q su redom sredine stranica AB, BC, CD i DA. Dokazati da je $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{DB}$.

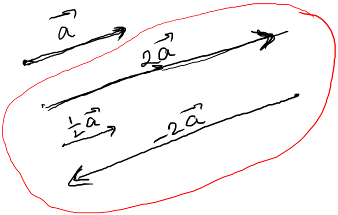
Proizvod vektora i skalara

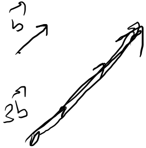
Množenjem vektora $\vec{a} \neq 0$ i skalara $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dobija se vektor $\alpha\vec{a}$ čiji je:

$|\alpha|\vec{a}$

1. pravac isti kao pravac vektora $\vec{a}$,
2. intezitet $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$,
3. smer isti kao smer vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotan ako je $\alpha < 0$. Ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = 0$, onda je $\alpha\vec{a} = 0$.

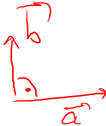
Suprotan vektor vektoru $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je vektor $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Suprotni vektori imaju isti pravac i intenzitet, a suprotan smer.





Za dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da su **kolinearni** akko imaju isti pravac, odnosno ako pripadaju istoj pravoj ili dvema paralelnim pravama.

Za kolinearne nenula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ postoji realni broj α različit od nule tako da je $\vec{a} = \alpha\vec{b}$.



Za dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da su **ortogonalni** (normalni) akko je ugao između njih prav.

Nula vektor je po definiciji kolinearan sa svakim vektorom i normalan je na svaki vektor.

Za tri nenula vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kaže se da su **komplanarni** akko su paralelni sa jednom ravni.

Nula vektor je po definiciji komplanaran sa svakim skupom komplanarnih vektora.

Ugao između vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ je ugao $\sphericalangle AOB$, O je koordinatni početak, pri čemu se dogovorno uzima da je $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \in [0, \pi]$.

Skalarni proizvod vektora

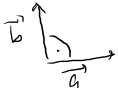
Skalarni proizvod nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$, je skalar (broj) definisan sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

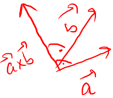
Kada je $\vec{a} = 0$ ili $\vec{b} = 0$, tada je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Osobine skalarnog proizvoda:

- $\boxed{\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2,}$
- $\boxed{\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a},}$
- $\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0,}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c},$
- $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \alpha(\vec{a}\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b}),$



Vektorski proizvod

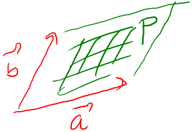


Vektorski proizvod nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}\times\vec{b}$, je vektor čiji je:

1. pravac normalan na pravce vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ i $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$.
2. intezitet $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})|$,
3. smer takav da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ tim redom čine desni triedar.

   Kada je $\vec{a}=0$ ili $\vec{b}=0$, tada je $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

$P = |\vec{a}\times\vec{b}|$



Osobine vektorskog proizvoda:

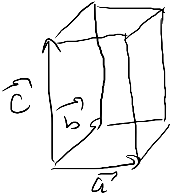
- $\vec{a}\times\vec{a}=0$,
- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$,
- $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\ \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$,
- $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$,
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$,
- Intenzitet vektorskog proizvoda dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak je površini paralelograma konstruisanog nad tim vektorima, tj. $P=|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Mešoviti proizvod

Mešoviti proizvod nenula vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, u oznaci $\boxed{\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})}$ je skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}\times\vec{c}$.

Osobine mešovitog proizvoda:

- $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})$,
- Nenula vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni akko je njihov mešoviti proizvod jednak nuli, tj. $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.
- Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, jednaka je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad tim vektorima, tj. $V = |\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})|$.

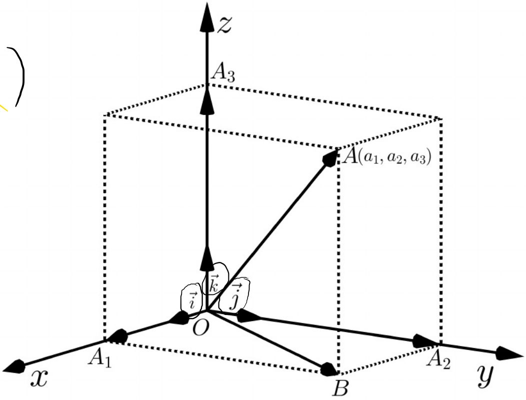


$$V = \left|\underbrace{\vec{a}\cdot\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})}_{\text{VEKTOR}}}_{\text{SKALAR (BROJ)}}\right|$$

Vektori u koordinatnom sistemu

Vektori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sa koordinatnim početkom O, čine desni sistem vektora ili desni triedar, što znači da rotacija vektora $\vec{i}$, ka vektoru $\vec{j}$, oko tačke O, u ravni određenoj vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ima najkraći put u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, gledano sa krajnje tačke vektora $\vec{k}$.

$A(a_1, a_2, \cancel{a_3})$



Svakoj tački $A(a_1, a_2, a_3)$ u prostoru odgovara vektor $\overrightarrow{OA}$ čija je početna tačka u koordinatnom početku O, a krajnja u tački $A(a_1, a_2, a_3)$ i koji senaziva **vektor položaja tačke** A.

Vektor $\overrightarrow{OA}$ može se razložiti kao zbir tri vektora (slika iznad):

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3},$$

gde je tačka $B(a_1, a_2, 0)$, a tačke A_1, A_2 i A_3 su projekcije tačke A na x-osu, y-osu i z-osu, redom,

tj. $A_1 = (a_1, 0, 0)$, $A_2 = (0, a_2, 0)$ i $A_3 = (0, 0, a_3)$.

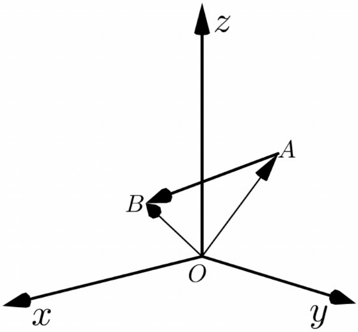
Kako je $\overrightarrow{OA_1} = a_1\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\vec{j}$ i $\overrightarrow{OA_3} = a_3\vec{k}$, sledi da je

$$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Umesto $\boxed{\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}}$ kraće se piše $\boxed{\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)}$.

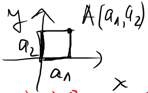
Neka su $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$ dve tačke u prostoru čiji su vektori položaja $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$, redom. Tada je

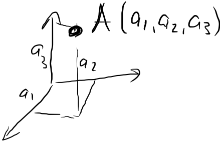
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$



Neka je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada:

- $\vec{a} = \vec{b}$ akko je $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ i $a_3 = b_3$,
- $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$, $2\vec{a} = 2(1,2,3) = (2,4,6)$
- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$,
  $\vec{a}+\vec{b} = (1,2,3) + (1,3,1) = (1+1, 2+3, 3+1) = (2,5,4)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$,
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,
  $\vec{a}\cdot\vec{b} = (1,2,3)\cdot(1,3,1)$ ~~$(1,6,3)$~~
  $= 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 = 1+6+3 = \underline{10}$
-





$\vec{a} = (1,2,3)$
$\vec{b} = (x, y-1, z+2)$
$\vec{a} = \vec{b}$
$x = 1$
$y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3$
$z + 2 = 3 \Rightarrow z = 1$
$\vec{b}(1,3,1)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k},$$

- $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} =$

$\vec{a} = (8, 2, -2)$ $\vec{b} = (4, -4, 0)$

1. Za vektore $\vec{a} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$ izračunati:

$|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{64 + 4 + 4} = \sqrt{72}$

$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$

$3\vec{a} + \vec{b} = 3(8, 2, -2) + (4, -4, 0) = (24, 6, -6) + (4, -4, 0) = (24+4, 6-4, -6+0)$
$= (28, 2, -6)$

$2\vec{a} - \vec{b} = 2(8, 2, -2) - (4, -4, 0) = (16, 4, -4) + (-4, 4, 0) = (12, 8, -4)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (8, 2, -2) \cdot (4, -4, 0) = 8 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 0 = 32 - 8 = 24$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(2 \cdot 0 - (-4) \cdot (-2)) - \vec{j}\,(8 \cdot 0 - 4 \cdot (-2)) + \vec{k}\,(8 \cdot (-4) - 4 \cdot 2)$$

$$= \vec{i}\,(-8) - \vec{j}\,(8) + \vec{k}\,(-40) = (-8, -8, -40)$$

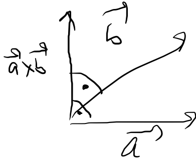
$\vec{a} = (1,2) \qquad \vec{b} = (3,4)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\vec{i}\,(2 \cdot 0 - 4 \cdot 0)}_{0} - \underbrace{\vec{j}\,(1 \cdot 0 - 3 \cdot 0)}_{0} + \vec{k}\,(2 \cdot 4 - 3 \cdot 2)$$

$$= 2\vec{k} = (0,0,2)$$



~~2.~~ Dati su vektori $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (1,1,0)$ i $\vec{c} = (1,-1,0)$. Naći vektor $\vec{x}$ tako da važi $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$ i $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$.

3. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{q} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

$$\vec{p} = (2, 3, 0)$$

$$\vec{q} = (1, -4, 0)$$

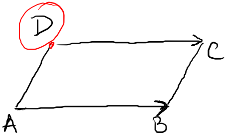
$$P = |\vec{p} \times \vec{q}| = |(0, 0, -11)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-11)^2} = 11$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(3 \cdot 0 - (-4) \cdot 0) - \vec{j}\,(2 \cdot 0 - 1 \cdot 0) + \vec{k}\,(2 \cdot (-4) - 1 \cdot 3)$$

$$= -11\,\vec{k} = (0, 0, -11)$$

4. Odrediti koordinate temena D paralelograma $ABCD$ i dužinu dijagonale AC ako su data tri uzastopna temena $A(1,-2,0)$, $B(2,1,3)$ i $C(2,0,5)$.



$A(1,-2,0)$
$B(2,1,3)$
$C(2,0,5)$
$D(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,1,3)-(1,-2,0)$$
$$= (2-1,\ 1-(-2),\ 3-0) = (1,3,3)$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (IMAJU ISTI PRAVAC, SMER I INTENZITET (DUŽINU))

$$\overrightarrow{DC} = (2,0,5) - (x,y,z) = (2-x,\ -y,\ 5-z)$$

$$(1,3,3) = (2-x,\ -y,\ 5-z)$$

$2-x=1 \Rightarrow x=1$
$-y=3 \Rightarrow y=-3$
$5-z=3 \Rightarrow z=2$

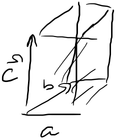
$$\boxed{D(1,-3,2)}$$

DUŽINA $|\overrightarrow{AC}|$?

$$\overrightarrow{AC} = (2,0,5)-(1,-2,0) = (1,2,5)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2+2^2+5^2}$$

5. Izračunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{k}$ i $\vec{c} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.



$\vec{a} = (-1, 2, -3)$ $\quad \vec{b} = (4, 0, 1)$ $\quad \vec{c} = (-2, 5, -1)$

$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |-51| = 51$

APSOLUTNA VREDNOST

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right|$$

$$= -1 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 \cdot 5$$

$$- \left((-2) \cdot 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 \cdot 2\right)$$

$$= 0 - 4 - 60 - (0 - 5 - 8)$$

$$= -64 - (-13) = -64 + 13 = -51$$

6. Date su tačke $A(1,1,1)$, $B(2,2,1)$ i $C(2,1,2)$. Izračunati ugao između vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

7. Odrediti realan parametar α tako da vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ i $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 4\vec{j}$ budu ortogonalni.

$$\vec{a} = (2,-3) = (2,-3,0)$$
$$\vec{b} = (\alpha,4) = (\alpha,4,0)$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(2,-3) \cdot (\alpha,4) = 0$$

$$2 \cdot \alpha + (-3) \cdot 4 = 0$$

$$2\alpha - 12 = 0$$

$$\boxed{\alpha = 6}$$

8. Dati su vektori $\vec{a} = (2k-1, 2, k+2)$, $\vec{b} = (3, k-1, -1)$ i $\vec{c} = (p, 1, 3)$, gde $k \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^-$.

   8.1 Odrediti vrednost parametara k i p tako da važi $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $|\vec{c}| = \sqrt{26}$.

   8.2 Za tako određene k i p pokazati da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.