Ispitivanje funkcija

March 24, 2021

Kada se kaže da treba detaljno ispitati funkciju $y = f(x)$ to znači da treba ispitati sledeće njene osobine:

1. **Oblast definisanosti - domen**
   Domen predstavlja skup svih vrednosti nezavisne promenljive x za koje je funkcija $y = f(x)$ definisana.
   Označava se sa D.
   Domeni nekih funkcija mogu se odrediti na osnovu sledećih pravila:

   - funkcija $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ je definisana kada su definisane funkcije $h(x)$ i $g(x)$ i kada je $g(x) \neq 0$;
   - funkcija $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$, gde je $n \in \mathbb{N}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $g(x) \geq 0$;

- funkcija $f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}$, gde je $n \in \mathbb{N}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$;
- funkcija $f(x) = \ln(g(x))$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $g(x) > 0$;
- funkcija $f(x) = e^{g(x)}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$;
- funkcije $f(x) = \arcsin(g(x))$ i $f(x) = \arccos(g(x))$ su definisane kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je

  $$-1 \leq g(x) \leq 1;$$
- funkcije $f(x) = \mathrm{arctg}(g(x))$ i $f(x) = \mathrm{arcctg}(g(x))$ su definisane kada je definisana funkcija $g(x)$.

Primer:

$$f(x) = x^3 + x + 1 \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R};$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x - 3} \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{3\};$$

$$f(x) = \frac{e^x - 5x}{(x-2)(x+7)} \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-7, 2\};$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad D = [0, \infty);$$

$$f(x) = \sqrt{x - 5} \quad \Longrightarrow \quad D = [5, \infty);$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad \Longrightarrow \quad D = (-\infty, -2] \cup [2, \infty);$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R};$$

$$f(x) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad D = (0, \infty);$$

$$f(x) = \ln(x + 4) \quad \Longrightarrow \quad D = (-4, \infty);$$

$$f(x) = \ln\Big((x-3)(x+5)\Big) \quad \Longrightarrow \quad D = (-\infty, -5) \cup (3, \infty);$$

$$f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R}.$$

2. Nule funkcije (presek sa x-osom) i presek sa y-osom

- Nule funkcije su tačke u kojima grafik funkcije preseca x-osu. Dobijaju se rešavanjem jednačine $y = 0$, tj. $f(x) = 0$.
- Presek sa y-osom je tačka u kojoj grafik funkcije preseca y-osu. Dobija se tako što se uzima da je $x = 0$ i pronalazi vrednost za y.

Primer: Za funkciju $f(x) = x^2 + x - 6$ odrediti nule i presek sa y-osom.

- za $y = 0$ je $x^2 + x - 6 = 0$, što je tačno za $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$. Dakle, nule funkcije su tačke $N_1(-3, 0)$ i $N_2(2, 0)$;
- za $x = 0$ je $f(0) = -6$. Dakle, presek sa y-osom je tačka $M(0, -6)$.

3. Znak funkcije

Znak funkcije govori za koje vrednosti x će funkcija biti pozitivna (iznad x-ose), a za koje vrednosti x će funkcija biti negativna (ispod x-ose).

Dobija se rešavanjem nejednakosti $f(x) > 0$ (ili $f(x) < 0$).

Primer: Ispitati znak funkcije $f(x) = x^2 + x - 6$.

Kako je $x^2 + x - 6 = 0$ za $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$, to se može zaključiti da je $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-3, 2)$.

4. Parnost - neparnost funkcije

Ako je domen funkcije simetričan u odnosu na nulu onda je:

- funkcija parna ako važi da je $f(-x) = f(x)$ i tada je grafik funkcije simetričan u odnosu na y-osu,
- funkcija neparna ako važi da je $f(-x) = -f(x)$ i tada je grafik funkcije simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Najčešće funkcija nije ni parna ni neparna i tada kažemo da je "ni-ni" .

Primer: Funkcija $f(x) = x^2$ je parna jer je $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ i njen grafik je simetričan u odnosu na y-osu.

Funkcija $f(x) = x^3$ je neparna jer je $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ i njen grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak.

5. Asimptote funkcije

- **Vertikalna**

  Vertikalna asimptota može da postoji samo u tačkama prekida funkcije.

  Neka je $x = a$ tačka prekida funkcije.

  - Ako je $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, kaže se da je prava $x = a$ vertikalna asimptota sa leve strane.
  - Ako je $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, kaže se da je prava $x = a$ vertikalna asimptota sa desne strane.

  Prava $x = a$ je vertikalna asimptota ako je ona vertikalna asimptota i sa leve i sa desne strane.

- **Horizontalna**

  Neka domen funkcije nije ograničen.

  Horizontalna asimptota je prava $y = b$, $b \in \mathbb{R}$ ako je

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

  Horizontalne asimptote funkcije ne moraju biti iste kad $x \longrightarrow \infty$, odnosno kad $x \longrightarrow -\infty$ i može postojati horizontalna asimptota samo u jednoj od tih vrednosti.

- **Kosa**

  Neka domen funkcije nije ograničen.

  Kosa asimptota je prava

  $$y = kx + n, \quad k, n \in \mathbb{R},$$

  ako postoje granične vrednosti

  $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx), \quad k \neq 0 \quad \text{ili}$$

  $$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx), \quad k \neq 0.$$

  Kose asimptote funkcije ne moraju biti iste kad $x \longrightarrow \infty$, odnosno kad $x \longrightarrow -\infty$ i može postojati kosa asimptota samo u jednoj od tih vrednosti.

  Postojanje horizontalne asimptote u ∞ isključuje postojanje kose asimptote u ∞ i obrnuto. Isto važi i u $-\infty$.

Primer: Ispitati asimptote sledećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ili drugačije zapisano $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty,$$

pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota date funkcije.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

pa je prava $y = 1$ horizontalna asimptota date funkcije i u ∞ i u $-\infty$.

Kose asimptote ne postoje jer postoji horizontalna asimptota i u ∞ i u $-\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ili drugačije zapisano $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \infty,$$

pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota date funkcije.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty,$$

pa data funkcija nema horizontalnu asimptotu.

Kosa asimptota: $y = kx + n$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1. \end{aligned}$$

Dakle, prava $y = x + 1$ je kosa asimptota date funkcije i u ∞ i u $-\infty$.

6. Monotonost i ekstremne vrednosti

Neka je funkcija $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ neprekidna i diferencijabilna na intervalu (a,b). Tada je:

- funkcija f monotono rastuća na intervalu (a,b) ako i samo ako je $f'(x)>0$ za sve $x\in(a,b)$;
- funkcija f monotono opadajuća na intervalu (a,b) ako i samo ako je $f'(x)<0$ za sve $x\in(a,b)$.

Potreban uslov da diferencijabilna funkcija $f(x)$ u nekoj tački x_0 ima ekstremnu vrednost (lokalni minimum ili maksimum) je da u toj tački važi $f'(x_0)=0$.

Ovaj uslov nije i dovoljan, tj. ako je $f'(x_0)=0$, to još uvek ne znači da u tački x_0 funkcija ima ekstremnu vrednost.

Dovoljan uslov za postojanje ekstremne vrednosti u tački x_0 je da prvi izvod funkcije u tački x_0 menja znak.

Ako funkcija $f(x)$ levo od x_0 opada, a desno od x_0 raste, onda ona u tački x_0 ima lokalni minimum.

Ako funkcija $f(x)$ levo od x_0 raste, a desno od x_0 opada, onda ona u tački x_0 ima lokalni maksimum.

Tačka x_0 za koju važi da je $f'(x_0) = 0$ naziva se stacionarna tačka.

Primer: Ispitati monotonost i ekstremne vrednosti sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$.

$f'(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ stacionarna tačka.

Dakle, ako postoji ekstremna vrednost funkcije $f(x) = x^2$ ona mora biti u tački $O(0,0)$.

Kako je $f'(x) < 0$ za $x < 0$, na intervalu $(-\infty, 0)$ funkcija opada, a kako je $f'(x) > 0$ za $x > 0$, na intervalu $(0, \infty)$ funkcija raste.

To znači da prvi izvod funkcije $f(x) = x^2$ menja znak u okolini tačke $O(0,0)$ pa je ta tačka lokalna ekstremna vrednost.

Kako funkcija levo od tačke $O(0,0)$ opada, a desno od te tačke raste, to znači da je tačka $O(0,0)$ lokalni minimum funkcije $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^3$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$.

$f'(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ stacionarna tačka.

Kako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to funkcija $f(x)$ stalno raste pa nema ekstremnih vrednosti.

7. Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

Neka funkcija $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ima drugi izvod u svakoj tački intervala (a, b). Tada je:

- funkcija f konveksna ("smeje se", $\smile$) na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) > 0$, za svako $x \in (a, b)$;
- funkcija f konkavna ("tužna je", $\frown$) na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) < 0$, za svako $x \in (a, b)$.

Tačka u kojoj funkcija prelazi iz konveksnosti u konveksnost i obrnuto naziva se prevojna tačka.

Potreban uslov da dva puta diferencijabilna funkcija ima prevoj u nekoj tački x_0 je da je $f''(x_0) = 0$.

Ovaj uslov nije i dovoljan, tj. ako je $f''(x_0) = 0$, to ne znači da funkcija $f(x)$ u tački x_0 ima prevoj.

Dovoljan uslov za postojanje prevojnih tačaka je da drugi izvod u posmatranoj tački menja znak.

Primer: Ispitati konveksnost, konkavnost i prevojne tačke sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f''(x) = 6x$.

$f''(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ moguća prevojna tačka.

Kako je $f''(x) < 0$ za $x < 0$, na intervalu $(-\infty, 0)$, funkcija je konkavna ($\frown$), a kako je $f''(x) > 0$ za $x > 0$, na intervalu $(0, \infty)$ funkcija je konveksna ($\smile$).

To znači da drugi izvod funkcije $f(x) = x^3$ menja znak u okolini tačke $O(0,0)$, što znači da je tačka $O\,(0,0)$ prevojna tačka.

b) $f(x) = x^3$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 \Longrightarrow f''(x) = 12x^2$.

$f''(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ moguća prevojna tačka.

Kako je $f''(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to je funkcija $f(x)$ stalno konveksna $(\smile)$ pa nema prevojne tačke.

8. **Grafik funkcije**
Na osnovu prethodnih tačaka može se nacrtati grafik funkcije.

Detaljno ispitati date funkcije i nacrtati njihove grafike:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$;

2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$;

3. $f(x) = \dfrac{4x}{4 - x^2}$;

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x+2)^2}$;

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$;

6. $f(x) = x - 2 - \dfrac{6}{x-1}$;

7. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$;

8. $f(x) = x\sqrt{x-1}$;

9. $f(x) = \ln \frac{x+3}{1-x}$;

1) $\frac{x+3}{1-x} > 0 \quad \wedge \quad 1-x \neq 0$

$x \neq 1$

		-3		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{x+3}{1-x}$	$-$		$+$		$-$

$\boxed{D = (-3, 1)}$

2) $f(x) = 0$

$\ln \frac{x+3}{1-x} = 0$

$\frac{x+3}{1-x} = e^0 = 1$

$\frac{x+3}{1-x} = 1$

$x+3 = 1-x$

$2x = -2$

$\boxed{x = -1}$

$x = 0$

$f(0) = \ln \frac{0+3}{1-0}$

$= \ln 3$

3) $f(x) > 0$

$\ln \frac{x+3}{1-x} > 0$

$\frac{x+3}{1-x} > e^0 = 1$

$\frac{x+3}{1-x} > 1$

$\frac{x+3}{1-x} - 1 > 0$

$\frac{x+3-1+x}{1-x} > 0$

$\frac{2x+2}{1-x} > 0$

$\frac{2(x+1)}{1-x} > 0$

		-3		-1		1	
$x+1$			$-$	0	$+$		$+$
$1-x$			$+$		$+$	0	$-$
y			$-$		$+$		

SAMO NA OVO NE GLEDAM DOMEN

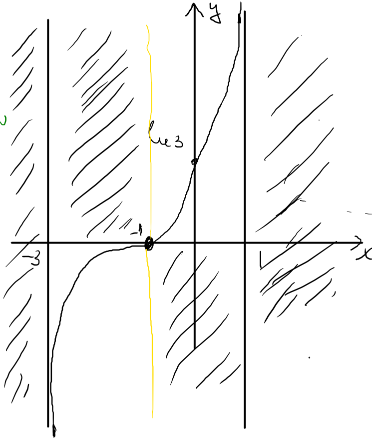
$f(x) > 0$ ZA $x \in (-1, 1)$

$f(x) < 0$ ZA $x \in (-3, -1)$

Moglo je

	-3		-1		1
$x+1$		$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0
y		$-$		$+$	

4) NI - NI



5) V.A.

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \ln\frac{x+3}{1-x} = \ln \lim_{x\to -3^+}\frac{x+3}{1-x} = \ln\frac{0^+}{4} = \ln 0^+ = -\infty$$

$\boxed{x=-3}$ V.A. SA DESNE STRANE

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\frac{x+3}{1-x} = \ln \lim_{x\to 1^-}\frac{x+3}{1-x} = \ln\frac{4}{0^+} = \ln(+\infty) = +\infty$$

$\boxed{x=1}$ V.A. SA LEVE STRANE

H.A. I K.A. NEMA IZ ZBOG $D=(-3,1)$

6) $y=\ln\frac{x+3}{1-x}$

$$y' = \frac{1}{\frac{x+3}{1-x}} \cdot \frac{1-x-(x+3)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}+3}{(x+3)(1-x)}$$

$$= \frac{4}{(x+3)(1-x)}, \quad x\neq -3, \ x\neq 1$$

$y'\neq 0 \ \forall x\in D$

NEMA E.V.

$y'>0$

$$\frac{4}{(x+3)(1-x)}>0$$

$$\underbrace{(x+3)(1-x)}>0$$

UVEK VAŽI ZBOG $D=(-3,1)$

$y'>0 \ \forall x\in D$

$y \nearrow \ \forall x\in D$

		-3		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
y'	$-$		$+$		$-$

$y'<0 \quad x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

y - TU NIJE DEFINISANO

7. $y' = \dfrac{4}{(x+3)(1-x)}$

$$y'' = \frac{-4\cdot\big(1-x+(x+3)(-1)\big)}{(x+3)^2(1-x)^2}$$

$$= \frac{-4(1-x-x-3)}{(x+3)^2(1-x)^2}$$

$$= \frac{-4(-2x-2)}{(x+3)^2(1-x)^2}$$

$$= \frac{8(x+1)}{(x+3)^2(1-x)^2} \qquad x \neq -3,\ x \neq 1$$

$$\boxed{D = (-3, 1)}$$

$y' = 0 \qquad x+1 = 0$

$\boxed{x = -1}$ KANDIDAT ZA P.T.

$y'' > 0 \qquad \dfrac{8(x+1)}{(x+3)^2(1-x)^2} > 0$

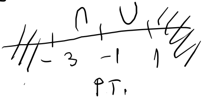
$(x+3)^2(1-x)^2 > 0 \quad \forall x \in D$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

$y'' > 0 \quad x \in (-1, \infty) \Rightarrow y \cup$ ZA $x \in (-1, 1)$

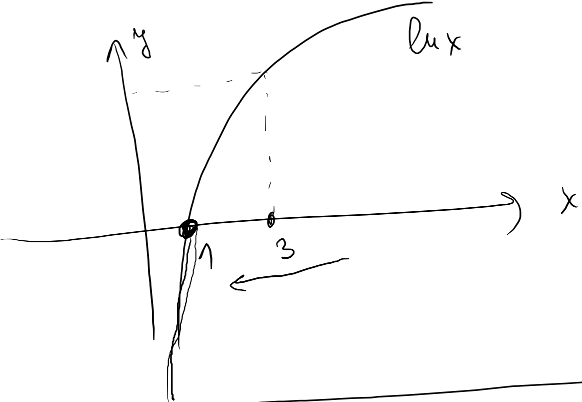
$y'' < 0 \quad x \in (-\infty, -1) \Rightarrow y \cap$ ZA $x \in (-3, -1)$



$x = -1$

$y_{PT}(-1) = \ln \dfrac{-1+3}{1-(-1)} = \ln \dfrac{2}{2}$

$= \ln 1 = 0$



$$\boxed{\ln x = a \iff x = e^{a}}$$

$\boxed{y=f(x)}$

10. $f(x) = \ln \dfrac{x-2}{x+1}$;

1) $\dfrac{x-2}{x+1} > 0$

	-1		2	
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$ 0	$+$		$+$
$\dfrac{x-2}{x+1}$	$+$	$-$		$+$

$\boxed{D = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)}$

2) $f(x) = 0$

$\ln \dfrac{x-2}{x+1} = 0$

$\dfrac{x-2}{x+1} = e^0$

$\dfrac{x-2}{x+1} = 1$

$x - 2 = x + 1$

$-2 = 1$

$\perp$

NEMA NULE, TJ. NEMA PRESEKA SA X-OSOM

$x = 0 \notin D$

NEMA PRESEKA SA y-OSOM

3) $f(x) > 0$

$\ln \dfrac{x-2}{x+1} > 0$

$\dfrac{x-2}{x+1} > 1 = e^0$

$\dfrac{x-2}{x+1} - 1 > 0$

$\dfrac{\cancel{x}-2-\cancel{x}-1}{x+1} > 0$

$\dfrac{-3}{x+1} > 0$ $\quad (-3<0)$

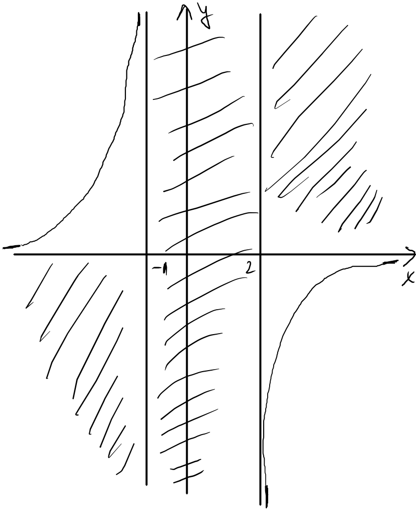
$x+1 < 0$

$x < -1$

$y > 0$ ZA $x \in (-\infty, -1)$

$y < 0$ ZA $x \in (2, +\infty)$

4) NI-NI



5. V.A.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \ln\frac{x-2}{x+1} = \ln \lim_{x\to -1^-}\frac{x-2}{x+1} = \ln\frac{-3}{0^-} = \ln(+\infty) = +\infty \Rightarrow \boxed{x=-1}$$ V.A. SA LEVE STR.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\ln\frac{x-2}{x+1} = \ln\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x+1} = \ln\frac{0^+}{3} = \ln 0 = -\infty \Rightarrow \boxed{x=2}$$ V.A. SA DESNE STR.

H.A. $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\frac{x-2}{x+1} = \ln \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x+1} = \ln 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$ H.A.

K.A. NEMA JER IMA H.A.

6. $y=\ln\frac{x-2}{x+1}$

$$y' = \frac{1}{\frac{x-2}{\cancel{x+1}}}\cdot\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

$x\neq 2,\ x\neq -1$

$y'\neq 0\ \forall x\in D$

$\Rightarrow$ NEMA E.V.

$y'>0$ $\quad \frac{3}{(x-2)(x+1)}>0$

$(x-2)(x+1)>0$

		-1		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
y'	$+$		$-$		$+$

$y'>0$ ZA $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

$y \nearrow$ ZA $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

$\boxed{y'<0 \text{ ZA } x\in(-1,2)}$

FUNKCIJA OVDE NE OPADA JER JE VAN DOMEN

$D=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

6, $y' = \dfrac{3}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{3}{x^2-x-2}$.

$y'' = \dfrac{-3\cdot(2x-1)}{(x-2)^2(x+1)^2}$ $\quad x \neq 2$, $x \neq -1$

$y''=0$ $\quad 2x-1=0$

$\boxed{x=\frac{1}{2}} \notin D$

NE MOŽE BITI P.T.

$y''>0$ $\quad \dfrac{\overset{<0}{-3}(2x-1)}{\underbrace{(x-2)^2(x+1)^2}_{>0\ \forall x\in D}} > 0$

$2x-1<0$

$x<\frac{1}{2}$

$y''>0$ ZA $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,\frac{1}{2})$

$y \cup$ ZA $x\in(-\infty,-1)$

$y''<0$ ZA $x\in(\frac{1}{2},2)\cup(2,+\infty)$

$y \cap$ ZA $x\in(2,+\infty)$

$D=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

11. $f(x) = e^{\frac{1}{2-x}}$;

1) $2-x \neq 0$

$x \neq 2$

$D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
$= (-\infty, 2)\cup(2,+\infty)$

2) $y \neq 0 \quad \forall x \in D$

NEMA PRESEK SA X-OSOM

$x=0 \quad f(0)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

3) $y>0 \quad \forall x\in D$

4) NI - NI

5) V.A.

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{2-x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} e^{\frac{1}{2-x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$

$\boxed{x=2}$ JE V.A. SA LEVE STRANE

H.A.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{2-x}} = e^{0} = 1$ $\boxed{y=1}$ H.A.

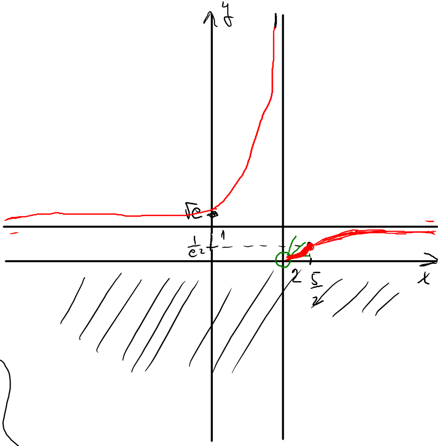
K.A. nema jer ima H.A.

6) $y' = e^{\frac{1}{2-x}} \cdot \frac{+1}{(2-x)^2}$ >0 >0 $\forall x\in D$

$x\neq 2$

$y' \neq 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow$ NEMA E.V.

$y'>0 \quad \forall x\in D, \; y \nearrow$



7,

$$y' = \frac{1}{(2-x)^2} \cdot e^{\frac{1}{2-x}}$$

$$y'' = \frac{-2\cancel{(2-x)}(-1)}{(2-x)^4} e^{\frac{1}{2-x}} + \frac{1}{(2-x)^2} \cdot e^{\frac{1}{2-x}} \cdot \frac{+1}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{2(2-x)}{(2-x)^4} e^{\frac{1}{2-x}} + \frac{1}{(2-x)^4} e^{\frac{1}{2-x}}$$

$$= \frac{1}{(2-x)^4} e^{\frac{1}{2-x}} (4-2x+1)$$

$$= \frac{1}{(2-x)^4} e^{\frac{1}{2-x}} (5-2x)$$

$x \neq 2$

$y'' = 0 \qquad 5-2x = 0$

$\boxed{x = \frac{5}{2}}$ KANDIDAT ZA P.T.

$y'' > 0 \qquad \underbrace{\frac{1}{(2-x)^4}}_{>0} \; e^{\frac{1}{2-x}} \; (5-2x)$

$>0 \; \forall x \in D$

$5-2x > 0 \longrightarrow -2x > -5$

$x < \frac{5}{2}$

$y'' > 0 \quad x \in (-\infty, 2) \cup (2, \frac{5}{2}) \quad y \cup$

$y'' < 0 \quad x \in (\frac{5}{2}, \infty) \quad y \cap$

$\cup \quad \cap$; $\frac{5}{2}$

$x = \frac{5}{2} \quad y_{PT}\left(\frac{5}{2}\right) = e^{\frac{1}{2-\frac{5}{2}}} = e^{\frac{2}{-1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

12. $f(x) = xe^x$.

1) $\boxed{D=\mathbb{R}}$

2) $y=0 \quad x=0$

3) $y>0 \quad x>0$

$y<0 \quad x<0$

4) $f(-x) = -xe^{-x} = -\frac{x}{e^x}$

$\neq -f(x)$

N|−N|

5) V.A. NEMA JER JE $D=\mathbb{R}$

NEMA HA U $+\infty$

H.A.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x \overset{\infty\cdot 0}{=}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} (-x^2e^x)$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$

~~NEMA~~ H.A. $y=0$ SAMO U $-\infty$

K.A. $y = kx+n$

$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x}$

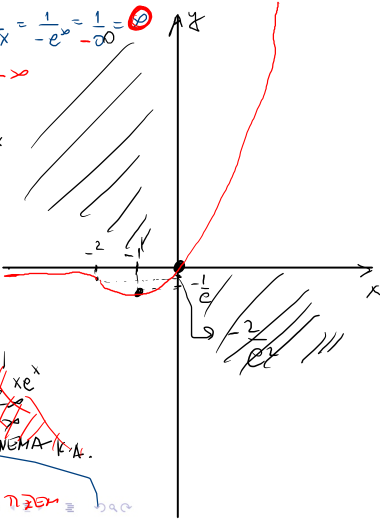
$= e^{+\infty} = +\infty$

NEMA K.A. U $+\infty$

~~$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = e^{-\infty} = 0$~~

~~$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$~~

~~NEMA K.A.~~



SVE SAM DOBRO URADILA ALI JE
STEPEN OD X POVEĆAO PA NIŠTA NE POSTIŽEM

6, $y = xe^x$

$y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$\boxed{e^x > 0}$

$y' = 0 \quad x+1=0$

$\boxed{x=-1}$ KANDIDAT ZA E.V

$y' > 0 \quad 1+x>0$

$x > -1$

$y \nearrow \quad x \in (-1, \infty)$

$y \searrow \quad x \in (-\infty, -1)$

$\searrow \quad \nearrow$

lok min

-1

$x=-1 \quad y_{min}(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$

7) $y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

$y' = 0 \quad x+2=0$

$\boxed{x=-2}$ — KANDIDAT ZA P.T.

$y'' > 0 \quad x+2>0$

$x > -2$

$y \cup \quad x \in (-2, +\infty)$

$y \cap \quad x \in (-\infty, -2)$

$\cap \quad \cup$

-2

$x = -2$

$y_{PT}(-2) = -2e^{-2}$

$= -\frac{2}{e^2}$