BINOMNI OBRAZAC

FAKTORIJEL

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$$

$$0! = 1$$

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot\underbrace{\overbrace{(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}}$$

$$= n\cdot(n-1)!$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!$$

$$8! = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$= 8\cdot 7!$$

$$= 8\cdot 7\cdot 6!$$

BINOMNI KOEFICIJENT

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!}$$

$$= \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\;2\cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cancel{(n-3)!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot\cancel{(n-3)!}}$$

NJUTNOVA BINOMNA FORMULA

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

① Одредити коефицијент уз члан a^7b^8 у развоју бинома $(a+b)^{15}$.

$$(a+b)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} a^{15-k} b^k$$

$n=15$

$$a^7 b^8 \to \boxed{k=8}$$

$$\binom{15}{8} = \frac{15!}{8!\,(15-8)!} = \frac{15!}{8!\cdot 7!}$$

$$= \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6435$$

② Наћи n у развоју бинома $(a+b)^n$, $n\in N$ ако је коефицијент трећег члана једнак 21.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^{n-0}b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\underline{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots$$

$\binom{n}{3}$ – NIJE KOEFICIJENT TREĆEG NEGO 4 ČLANA

$$\binom{n}{2}=21$$

$$\frac{n!}{2\cdot(n-2)!}=21$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{2\cdot\cancel{(n-2)!}}=21 \quad /\cdot 2$$

$$n^2-n=42$$

$$n^2-n-42=0$$

$$\boxed{n_1=7} \qquad \cancel{n_2=-6}$$

$n\in N$

③ Збир прва три коефицијента развоја $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ је 46. Нађи члан развоја који не садржи x.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=46$$

$$1+n+\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=46$$

$$1+n+\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cdot 1\,\cancel{(n-2)!}}=46$$

$$1+n+\frac{n^2-n}{2}=46 \;/\cdot 2$$

$$2+2n+n^2-n=92$$

$$n^2+n-90=0$$

$$\boxed{n_1=9} \qquad \cancel{n_2=-10} \notin \mathbb{N}$$

Напомена

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!\,(n-1)!}=\frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=n$$

$$n=9 \qquad \left(\overset{a}{x^2}+\overset{b}{\frac{1}{x}}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(x^2)^{9-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^{2\cdot(9-k)}\cdot\left(x^{-1}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^{18-2k-k}$$

Одакле, $18 - 2k - k = 0$ да не би било x

$18 = 3k$

$\boxed{k = 6}$

Члан је $\binom{9}{6}\underbrace{(x^2)^3\left(\frac{1}{x}\right)^6}_{x^0 = 1} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!\,(9-6)!} =$

$= \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$

4) Нађи $n \in \mathbb{N}$ тако да је збир коефицијената другог и трећег члана у развоју $\left(\sqrt[5]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^n$ једнак 153. За такво n, одредити члан који не садржи x.

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=153$$

$$n+\frac{n!}{2!(n-2)!}=153$$

$$n+\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{2\cdot\cancel{(n-2)!}}=153 \quad /\cdot 2$$

$$2n+n^2-n=306$$

$$n^2+n-306=0$$

$$\cancel{n=-18} \qquad \boxed{n=17}$$

$n \notin \mathbb{N}$

a

$$\left(\sqrt[5]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^{17}=\sum_{k=0}^{17}\binom{17}{k}\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^{17-k}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{17}\binom{17}{k}\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{17-k}\cdot\left(x^{-\frac{1}{6}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{17}\binom{17}{k}x^{\frac{2}{5}(17-k)-\frac{1}{6}k}$$

x^0: $\frac{2}{5}(17-k)-\frac{1}{6}k=0 \quad /\cdot 30$

$12(17-k)-5k=0$

$-\cancel{17}k=-\cancel{17}\cdot 12$

$\boxed{k=12}$

$$\binom{17}{12}=\frac{17!}{12!\,(\underbrace{17-12}_{5})!}=\frac{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot\cancel{12!}}{\cancel{12!}\,5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=6188$$

5) У развоју бинома $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{y}{x}\right)^n$, $x \neq 0$, $n \in N$, одредити члан који не садржи x ако је биномни коефицијент трећег члана за 5 већи од биномног коефицијента другог члана.

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 5$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{1!(n-1)!} + 5$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{2\cdot\cancel{(n-2)!}} = \frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} + 5 \quad /\cdot 2$$

$$n^2 - n = 2n + 10$$

$$n^2 - 3n - 10 = 0$$

$$\boxed{n_1 = 5} \qquad \cancel{n_2 = -2}$$

$n \in N$

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{y}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{5-k} \left(\frac{y}{x}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{\frac{2}{3}(5-k)} \cdot x^{-k}\, y^k$$

$$x^0: \quad \frac{2}{3}(5-k) - k = 0 \quad /\cdot 3$$

$$10 - 2k - 3k = 0$$

$$10 = 5k$$

$$\boxed{k = 2}$$

$$\binom{5}{2} y^2 = \frac{5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{2!}\cdot\cancel{3!}} = 10y^2$$