Osnovne logičke operacije, pojam funkcije

April 7, 2024

LOGIKA

$2+3=5 \quad \top$

$2+3=-1 \quad \bot$

$2+$

Iskazi su rečenice za koje se zna da li su tačne ($\top$) ili netačne ($\bot$). Obeležavaju se malim latiničnim slovima: p, q, r, ... koja se nazivaju iskazna slova.

Definicije osnovnih logičkih operacija:

$x+y=3 \wedge x-y=6$

$p \quad \neg p$

$\exists x \dots$

$\neg\exists x \dots$

$2+3=5 \wedge 3-1=0$

$\top \wedge \bot$

$\bot$

Negacija

$\neg$	
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Konjukcija

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Disjunkcija

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

Implikacija

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

Ekvivalencija

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
$\top$	$\top$		
$\top$	$\bot$		
$\bot$	$\top$		
$\bot$	$\bot$		

$\rceil$ $\quad \wedge \quad \vee$

$\Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

Tautologija je iskaz koji je uvek tačan.

Primeri tautologija: $p, q, r \in \{\top, \bot\}$

- komutativnost konjukcije i disjunkcije:
$$p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p$$
$$p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p$$

- asocijativnost konjukcije i disjunkcije:
$$p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$$

- distributivnost:
$$p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- zakon isključenja trećeg:
$$p \wedge \rceil p \quad \Leftrightarrow \quad \bot$$
$$p \vee \rceil p \quad \Leftrightarrow \quad \top$$

- zakon kontrapozicije: $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$

- De Morganovi zakoni:
$$\rceil (p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \rceil p \vee \rceil q$$
$$\rceil (p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \rceil p \wedge \rceil q$$

- zakon uklanjanja dvojne negacije: $\rceil\rceil p \quad \Leftrightarrow \quad p$

Za iskazivanje tvrđenja osim logičkih operacija, potrebni su i **logički kvantifikatori** $\forall$ (za svako) i $\exists$ (postoji).

- $(\forall x)\,\alpha(x)$: "za svako x tačno je $\alpha(x)$"
- $(\exists x)\,\alpha(x)$: "postoji x tako da važi $\alpha(x)$"

$\forall$ $\exists$

Primer:

- $(\forall x \in \mathbb{R})\left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\right)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x + 2 = 5)$

$3 + 2 = 5$

$\forall x$

$\exists!$

$(\exists x \in \mathbb{R})\,(x^2 - 1 = 0)$

$1, -1$

$\forall$

SKUPOVI

$x \in S$

$\boxed{x \notin S}$, $\boxed{\neg x \in S}$

$\boxed{\emptyset}$ $\{\}$

$\{\emptyset\}$

$\mathcal{U}$

$\{a\} = \{a, a, a, a\}$

$\{2, -2\} = \{-2, 2\}$

Skup je osnovni pojam koji se ne definiše.
Skupovi se obeležavaju sa A, B, C, ..., a elementi skupa sa a, b, c, ...

Činjenica da je x elemenat skupa S obeležava se sa: $x \in S$ i čita x pripada skupu S, a činjenica da x nije elemenat skupa S obeležava se sa: $x \notin S$ i čita x ne pripada skupu S.

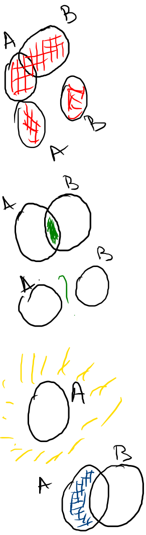
Skup koji nema elemenata zove se **prazan skup** i obeležava se sa $\emptyset$ ili $\{\}$.
Napomena: $\{\emptyset\}$ - nije prazan skup već skup koji sadrži jedan elemenat (prazan skup).

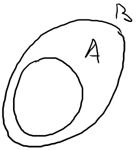
Skup kome pripadaju svi elementi svih skupova koje posmatramo zove se **univerzalni skup** i obeležava sa $\mathcal{U}$.

Redosled elemenata u skupu nije važan, tj. $\{a, b\} = \{b, a\}$.
U skupu$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata podrazumeva se da su svi elementi tog skupa međusobno različiti.

Kardinalni broj skupa A, je broj elemenata koji pripadaju skupu A, i obeležava se sa $Card\,(A)$.

Skupovne relacije i operacije se definišu preko odgovarajućih logičkih operacija:





- **jednakost** skupova: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
- skupovna **inkluzija** (podskup):
  $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

  $A \subseteq B$

  pravi podskup: $\underline{A \subset B} \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

  $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$, $A \neq B$

  Za svaki skup A važi: $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$.

  $\mathbb{R}$

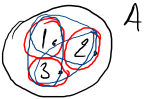
- **unija** skupova: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- **presek** skupova: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
  Skupovi su disjunktni ako je njihov presek prazan skup, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.
- **komplement** skupa: $\overline{A} = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$
- **razlika** skupova: $\underbrace{A \setminus B}_{} = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

  A BEZ B

Osobine skupovnih operacija:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad A \cap \mathcal{U} = \emptyset$ $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\quad \overline{\overline{A}} = A$
  $A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\quad A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
- zakon komutativnosti: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ $\qquad a+b=b+a$
- zakon asocijativnosti: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad a+(b+c)=(a+b)+c$
- zakon distributivnosti: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad a\cdot(b+c)=ab+ac$
- zakon idempotentnosti: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
- zakon apsorpcije: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$
- De Morganovi zakoni: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Partitivni skup, skupa A, je skup svih podskupova skupa A, tj. $\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$.

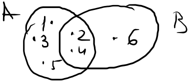


Napomena: $\emptyset$ i A su uvek elementi skupa $\mathcal{P}(A)$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

Primer: Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{2, 4, 6\}$. Odrediti: $|A|$, $|B|$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(B)$

$|A| = card(A) = 5$



$|B| = card(B) = 3$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{2, 4\}$

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, B\}$

$A \setminus B = \{1, 3, 5\}$

$B \setminus A = \{6\}$

RELACIJE

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

$(b,a) = \{\{b\},\{a,b\}\}$

$(a,b) \neq (b,a)$

$A=\{a,b\}$

$B=\{o,\square\}$

$A\times B=\{(a,o),(a,\square),(b,o),(b,\square)\}$

Uređen par elemenata a i b, u oznaci (a, b) je $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, gde je a prva komponenta, a b druga komponenta uređenog para.

Napomena: $(b, a) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ pa za $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$.
$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Dekartov proizvod skupova A i B je skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A, a druga komponenta iz skupa B, tj.
$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$.

$B\times A=\{(o,a),(o,b),(\square,a),(\square,b)\}$

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$
Na osnovu ovog primera može se zaključiti da Dekartov proizvod nije komutativan, tj. $A \times B \neq B \times A$.

Dekartov kvadrat skupa A je $A^2 = A \times A = \{(a_1, a_2) \,|\, a_1, a_2 \in A\}$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

$A = \{a, b\}$, $A = \{a, b\}$

$A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

Binarna relacija je bilo koji podskup od $A \times B$, tj. $\underline{\rho \subseteq A \times B}$.

Ako uređen par (x, y) pripada relaciji ρ kaže se da su x i y u relaciji ρ i piše se $(x, y) \in \rho$ ili $x\rho y$.

Binarna relacija skupa A**,** je bilo koji podskup od A^2, tj. $\rho \subseteq A^2$.

Kako je $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ to su $\emptyset$ i A^2 sigurno relacije skupa A, i one se nazivaju prazna i puna relacija.

Primer : $A = \underline{\{1, 2, 3\}}$ $\quad A = \{1, 2, 3\}$

$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

$\rho_2 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

$\rho_3 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$\rho_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

$(x,y) \in \rho$

$x \rho y$

$\boxed{x \leq y}$

$(x,y) \in \leq$

$a = b$

$(a,b) \in =$

$A^2 = A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ $\quad \rho_8 = \{(3,1), (3,2)\}$

$\rho_6 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ $\quad \rho_7 = \{(1,1)\}$

$\boxed{A = \{1,2,3\}}$ $\quad A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$< \ \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\} \quad \Longrightarrow \quad 1<2,\ 1<3,\ 2<3$

$\geq \ \in \{(1,1),(2,2),(2,1),(3,3),(3,2),(3,1)\}$

$= \ \in \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

$(x,y)\in\rho \wedge (y,z)\in\rho$

$(x,z)\in\rho$

Osnovne osobine binarne relacije ρ skupa $A \neq 0$:

- **refleksivnost (R)**: $(\forall x \in A)\, x\rho x$
- **simetričnost (S)**: $(\forall x, y \in A)\, (x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
- **antisimetričnost (A)**: $(\forall x, y \in A)\, (x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$ ili $(\forall x, y \in A)\, ((x\rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \rceil\, (y\rho x))$
- **tranzitivnost (T)**: $(\forall x, y, z \in A)\, ((x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z)$

Primer : $A = \{1, 2, 3\}$

$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$ R, S, $\cancel{A}$ T

$\rho_2 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$ $\cancel{R}$ $\cancel{S}$ $\cancel{A}$ T

$\rho_3 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ $\cancel{R}$ $\cancel{S}$ $\cancel{A}$ $\cancel{T}$

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ $\cancel{R}$ $\cancel{S}$ A T

$\rho_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$ $\cancel{R}$ $\cancel{S}$ A T

$\rho_6 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ R, S, A, T

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija ekvivalencije (RST)** akko je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primer: relacija jednakosti $=$ na skupu realnih brojeva, relacija paralelnosti $\parallel$ na skupu svih pravih u prostoru, relacija podudarnosti na skupu svih duži, relacija
$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4), (4,3), (5,5)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija poretka (RAT)** akko je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Primer: relacije $\leq$ i $\geq$ na skupu prirodnih brojeva, relacija deli $|$ na skupu prirodnih brojeva, relacija

$$\begin{aligned}\rho_2 = \{&(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,4), \\ &(1,5), (2,4), (3,4), (3,5)\}\}\end{aligned}$$

na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....

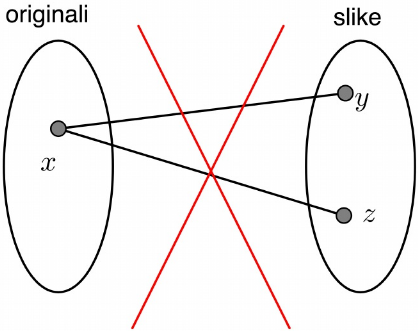
FUNKCIJE

Funkcija $f \subseteq A \times B$ je binarna relacija kod koje ne postoje dva različita uređena para sa jednakim prvim komponentama, tj. za koju važi

$$\forall x, y, z, \; ((x, y) \in f \; \wedge \; (x, z) \in f \Longrightarrow y = z) \, .$$

$(2,4) \in \; ^2$

$4 = 2^2$



Uobičajeno je da se umesto $(x, y) \in f$ piše $y = f\,(x)$.

$f: A \to B$

$f(x) = x^2$

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 4, 9\}$

Domen (oblast definisanosti) funkcije f je $\mathcal{D}(f) = \{x \mid \exists y, (x, y) \in f\}$, tj. skup svih prvih komponenti parova iz f. Elementi domena se nazivaju originali.

Kodomen (skup vrednosti) funkcije f je $\mathcal{K}(f) = \{y \mid \exists x, (x, y) \in f\}$, tj. skup svih drugih komponenti parova iz f. Elementi kodomena se nazivaju slike.

Funkcija f **iz skupa** A **u skup** B, u oznaci $f : A \longrightarrow B$, je ona funkcija kod koje je $A = \mathcal{D}(f)$, a $\mathcal{K}(f) \subseteq B$, tj. ona funkcija kod koje je skup svih prvih komponenti tačno skup A, a skup svih drugih komponenti je podskup skupa B.

$f(x) = x^2$

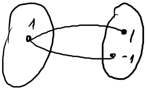
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

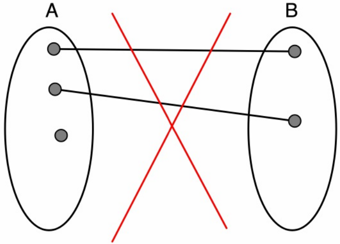
$y^2 = x$

$y = \sqrt{x}$

$y = -\sqrt{x}$

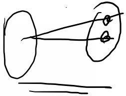
$y = \pm\sqrt{x}$





- ovo jeste funkcija

ali nije funkcija A→B



Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, b)\}$ jeste funkcija ali nije $f : A \longrightarrow B$ jer elemenat $3 \in A$ nema sliku;
- $f_3 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$ nije funkcija jer se elemenat $1 \in A$ preslika u dve slike, u a i u b. Čim nije funkcija ne može biti ni $f : A \longrightarrow B$.

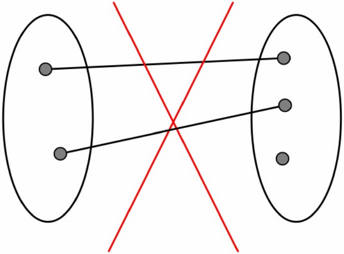
Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **sirjektivna, ("na"),** što se označava sa $f : A \xrightarrow{''na''} B$, ako je $\mathcal{K}(f) = B$, tj. ako se svaki elemenat skupa B pojavljuje bar jednom kao druga komponenta u f.
Dakle,

$$f : A \xrightarrow{''na''} B \text{ ako } (\forall y \in B)(\exists x \in A)\, y = f(x).$$

$f(x) = x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$



- jeste funkcija f:A $\longrightarrow$ B,
ali nije "na"

Napomena: Da bi se ispitivala sirjektivnost funkcije nije dovoljno da funkcija bude samo funkcija, neophodno je da bude funkcija skupa A u skup B.

Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.

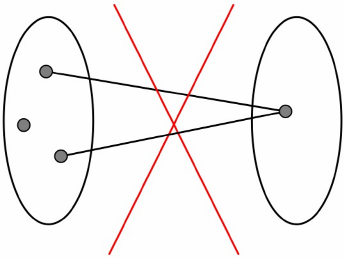
- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ jeste $f : A \xrightarrow{''na''} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \xrightarrow{''na''} B$ jer se nijedan elemenat skupa A ne preslika u elemenat $b \in B$;
- $f_3 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste funkcija, ali nije $f : A \longrightarrow B$, pa ne može biti ni $f : A \xrightarrow{''na''} B$.

Funkcija f je **injektivna ("1-1")** ako u f ne postoje dva različita uređena para sa jednakim drugim komponentama.
Dakle,

$$f \text{ je injektivna funkcija ako } (\forall x, y \in \mathcal{D}(f))\,(f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)\,.$$

$f(x) = x^2$

$f(1) = f(-1) = 1$



- jeste funkcija,
ali nije "1-1"

Napomena: Da bi se ispitivala injektivnost funkcije dovoljno je da funkcija bude samo funkcija. Injektivnost se može ispitivati za bilo kakvu funkciju, a može i za funkciju skupa A u skup B.
Injektivna funkcija skupa A u skup B se označava se $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$

Primer: Neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$ jeste $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$ jer se oba elemenat skupa A preslikaju u elemenat $a \in B$;
- $f_3 = \{(1, a)\}$ jeste funkcija i jeste "1-1" iako nije $f : A \longrightarrow B$.

Funkcija f je **bijektivna** ako je u isto vreme sirjektivna i injektivna. Bijektivna može biti samo funkcija skupa A u skup B i tada se ona označava se $f : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$.

Primer: Neka je , $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ jeste $f : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$. jer nije injektivna pošto se elementi 1 i 2 preslikaju u isti elemenat a;
- $f_3 = \{(1, a)\}$ jeste funkcija ali nije bijekcija jer nije $f : A \longrightarrow B$.

Neka su A, B i C neprazni skupovi i neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ date funkcije. Funkcija $g \circ f : A \longrightarrow C$ definisana sa

$$(\forall x \in A)\,\underline{(g \circ f)\,(x)} = g\,(f\,(x))$$

zove se **kompozicija** funkcija f i g.

Za funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoji **inverzna funkcija** $f^{-1} : B \longrightarrow A$ akko je funkcija f bijektivna i tada je $f^{-1}\,(f\,(x)) = x$.

$y = \ln(\sin x)$

$f(x) = x^2 \quad f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$f(x) = \sqrt{x}$