MATEMATIČKA INDUKCIJA

1) $n=1$ ✓

2) pp. da tvrdnja važi za $n=k$

i pokažemo da važi za $n=k+1$

① DOKAZATI DA JE $\underbrace{1+2+3+\dots+n}$ $= \frac{n(n+1)}{2}$

1) $n=1$

$1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$1 = \frac{1\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$ ✓

2) $\underbrace{\text{Pretpostavimo}}_{\text{pp.}}$ da je tvrdnja tačna za $n=k$, tj. da važi da je

VAŽI

$$\boxed{\boxed{1+2+3+\dots+k} = \frac{k(k+1)}{2}}$$

i dokažimo da važi za $n=k+1$, tj. dokažimo da važi:

TREBA

$$\boxed{1+2+3+\dots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}}$$

DOKAZ

$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\boxed{1+2+3+\dots+k}+k+1 =$

$= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ ✓

3) DOKAZATI DA JE $5+8+11+\dots+(3n+2)=\dfrac{n(3n+7)}{2}$.

1) $\boxed{n=1}$ $5=\dfrac{1\cdot(3\cdot1+7)}{2}$

$5=\dfrac{10}{2}$ ✓

2) pp. da tvrđenje važi za $n=k$, tj. da je

$5+8+11+\dots+(3k+2)=\dfrac{k(3k+7)}{2}$

VAŽI

I dokažimo da važi za $n=k+1$, tj. da važi:

$5+8+11+\dots+(3k+2)+(\underbrace{3(k+1)+2}_{3k+3+2})=\dfrac{(k+1)(3(k+1)+7)}{2}$

Ili sređeno

TREBA

$5+8+11+\dots+(3k+2)+(3k+5)=\dfrac{(k+1)(3k+10)}{2}$ ✓

DOKAZ

$\underbrace{5+8+11+\dots+(3k+2)}+(3k+5)=$

$=\dfrac{k(3k+7)}{2}+(3k+5)=$

$=\dfrac{k(3k+7)+2(3k+5)}{2}$

$=\dfrac{3k^2+7k+6k+10}{2}=$ ✓

$=\dfrac{3k^2+13k+10}{2}$

$3k^2+13k+10=0$

$k_{1,2}=\dfrac{-13\pm\sqrt{169-120}}{6}$

$=\dfrac{-13\pm7}{6}=\begin{cases}-1\\-\dfrac{10}{3}\end{cases}$

$$\frac{3k^2+13k+10}{2} = \frac{3\left(k-(-1)\right)\left(k-\left(-\frac{10}{3}\right)\right)}{2}$$

$$= \frac{3(k+1)\left(k+\frac{10}{3}\right)}{2} = \frac{(k+1)(3k+10)}{2}$$

$$ax^2+bx+c=0$$

x_1, x_2 – REŠENJA

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

③ DOKAZATI DA JE $5^{n-1}+2^{n}$ DELJIVO SA 3.

(TO SE PIŠE $3 \mid 5^{n-1}+2^{n}$)

1) $n=1$ $\quad 5^{1-1}+2^{1} = 1+2 = 3 \quad 3 \mid 3$

2) pp. da za $n=k$ važi $3 \mid 5^{k-1}+2^{k}$, To znači da se

$\boxed{5^{k-1}+2^{k} = 3\cdot m}$, $m \in \mathbb{Z}$

$\hookrightarrow 5^{k-1} = 3m - 2^{k}$

I pokažimo da važi za $n=k+1$, tj. $3 \mid 5^{k+1-1}+2^{k+1}$

POKAZ: $5^{k+1-1}+2^{k+1} = 5\cdot 5^{k-1} + 2\cdot 2^{k} = 5\cdot(3m-2^{k})+2\cdot 2^{k}$

$= 5\cdot 3m - 5\cdot 2^{k} + 2\cdot 2^{k} = 5\cdot 3m - 3\cdot 2^{k} = 3\cdot(5m-2^{k})$

✓

(4) DOKAZATI $9 \mid 7^n + 3n - 1$

1) $n = 1$ $\quad 7^1 + 3\cdot 1 - 1 = 9$ ✓ $\quad 9 \mid 9$

2) pp. da tvrdnja važi za $n = k$, tj. $9 \mid 7^k + 3k - 1$. To znači da je $\boxed{7^k + 3k - 1 = 9\cdot m}$, $m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{7^k = 9m - 3k + 1}$

Dokažimo da tvrdnja važi za $n = k+1$, tj. da važi da $9 \mid 7^{k+1} + 3(k+1) - 1$.

$$7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7\cdot 7^k + 3k + 3 - 1 = 7(9m - 3k + 1) + 3k + 2$$

$$= 7\cdot 9\cdot m - 21k + 7 + 3k + 2 = \underline{63}m - \underline{18}k + \underline{9}$$

$$= 9\cdot(\underbrace{7m - 2k + 1}) \checkmark$$