Polinomi

November 17, 2021

$$-x-2y+z=1$$
$$x-y-z=-1$$
$$y-z=0$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{AX=B}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x-2y+z \\ x-y-z \\ y-z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$AX=B \quad / A^{-1} \text{ z lewe}$$

$$X=A^{-1}B$$

Polinom nad proizvoljnim poljem $\mathbb{F} = (F, +, \cdot)$ je uređena k-torka elemenata tog polja kod koje je poslednja komponenta različita od "nule" polja, tj. polinom je

$$p = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n), \; n \in \mathbb{N}, \; a_i \in F, \; a_n \neq 0.$$

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ su **koeficijenti** polinoma;
- a_0 je **slobodan član** polinoma;
- a_n je **vodeći koeficijent;**
- ako je $a_n = 1$ polinom je **normiran** (normalizovan);
- $n = \deg(p)$ je **stepen** polinoma p;
- ako je $n = 0$ i $a_0 \neq 0$, onda je p **konstantan polinom** nultog stepena.
- za $n = 0$ i $a_0 = 0$ polinom p je **nula polinom**. Stepen nula polinoma nije definisan.
- $F[x]$ je skup svih polinoma nad poljem $\mathbb{F}$.
- $(F[x], +, \cdot)$ je komutativan prsten sa jedinicom, gde su $+$ i $\cdot$ sabiranje i množenje polinoma.

Polinomu $p = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nad poljem $\mathbb{F}$ jednoznačno odgovara **polinomski izraz**

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

tj. svaki polinom se može poistovetiti sa odgovarajućim polinomskim izrazom (iako su to formalno različiti pojmovi) pa je uobičajeno da se za polinomski izraz $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kaže da je polinom.

Polinomska funkcija je funkcija definisana polinomskim izrazom, tj. funkcija

$$p : F \longrightarrow F, \; p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \; a_i \in F.$$

Polinomska funkcija se u opštem slučaju ne može poistovetiti sa polinomom jer u slučaju konačnih polja različitim polinomima odgovaraju iste polinomske funkcije. U slučaju beskonačnih polja postoji uzajamno jednoznačna korespodencija između polinoma i polinomskih funkcija, pa se u tom sličaju može koristiti naziv polinom i za polinomsku funkciju. Kako će ovde biti reči samo o polinomima nad konačnim poljima za polinomsku funkciju će biti korišćen termin polinom.

Dva nenula polinoma su **jednaka** akko su istog stepena i ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki.

Sabiranje polinoma
Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x)) = n$ i $\deg(q(x)) = m$. Sabiranje polinoma $p(x)$ i $q(x)$ vrši se tako što se koeficijenti uz iste stepene promenljive saberu. Stepen polinoma $p(x) + q(x)$ je

$$\deg\big(p(x) + q(x)\big) \leq \max\{n, m\}.$$

Zbir nula polinoma i polinoma $p(x)$ jeste polinom $p(x)$.

Množenje polinoma
Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x)) = n$ i $\deg(q(x)) = m$. Proizvod polinoma $p(x)$ i $q(x)$ vrši se tako što se pomnože svi sabirci polimoma $p(x)$ sa svim sabircima polinoma $q(x)$. Stepen polinoma $p(x) \cdot q(x)$ je

$$\deg\big(p(x) \cdot q(x)\big) = n + m.$$

Proizvod nula polinoma i polinoma $p(x)$ je nula polinom.

Deljenje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x)) = n$ i $\deg(q(x)) = m$, gde je $n \geq m$. Tada postoje jedinstveni polinomi $s(x)$ i $r(x)$, tako da je

$$p(x) = q(x)s(x) + r(x),$$

gde je $\deg\big(r(x)\big) < \deg\big(q(x)\big)$ ili je $r(x) = 0$. Ako je $r(x) = 0$, tada je polinom $p(x)$ deljiv polinomom $q(x)$, tj. polinom $q(x)$ deli polinom $p(x)$, i to se zapisuje $q(x) \mid p(x)$.

Polinom $s(x)$ naziva se količnik, a $r(x)$ ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $q(x)$.

Deljenje polinoma često se piše i u obliku

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Količnik pri deljenju nula polinoma $p(x)$ sa proizvoljnim nenula polinomom $q(x)$ je nula polinom.

$$(x^5+2x^3-3x^2+x-1):(x^2+2)=\boxed{x^3-3}$$

$$-(x^5+2x^3)$$

$$-3x^2+x-1$$

$$-(-3x^2-6)$$

$$x+5$$

ostatak

količnik

$$7:2=3$$

$$1$$

$$\boxed{7=2\cdot 3+1}$$

$$x^5+2x^3-3x^2+x-1=(x^2+2)(x^3-3)+x+5$$

Primer: Odrediti količnik $s(x)$ i ostatak $r(x)$ pri deljenju polinoma $p(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$ polinomom $q(x) = x^2 - x + 2$.

$$
\begin{array}{l}
(x^5 + x^4 - 2x + 1) : (x^2 - x + 2) = \underbrace{x^3 + 2x^2 - 4}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^5 - x^4 + 2x^3)} \\
\qquad 2x^4 - 2x^3 - 2x + 1 \\
\quad \underline{-(2x^4 - 2x^3 + 4x^2)} \\
\qquad\qquad -4x^2 - 2x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-(-4x^2 + 4x - 8)} \\
\qquad\qquad\qquad \underbrace{-6x + 9}_{\text{ostatak}}
\end{array}
$$

Polinom $s(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ je količnik, a $r(x) = -6x + 9$ je ostatak pri deljenju $p(x)$ sa $q(x)$. Odnosno,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^5 + x^4 - 2x + 1}{x^2 - x + 2} = x^3 + 2x^2 - 4 + \frac{-6x + 9}{x^2 - x + 2}.$$

Najveći zajednički delilac (NZD) polinoma je polinom najvećeg stepena koji ih deli.
Za polinome čiji je NZD jednak 1 kaže se da su uzajamno prosti.
Za proizvoljne nenula polinome p i q postoji NZD. On je jedinstven do na multiplikativnu konstantu, tj. ako je $NZD\,(p,q)=d$ tada je i αd, $\alpha \neq 0$ takođe $NZD\,(p,q)$.
NZD se određuje pomoću Euklidovog algoritma.

Primer: Odrediti *NZD* polinoma $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ i $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Prvo se podeli polinom $p(x)$ polinomom $q(x)$

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : (x^3 + 2x^2 - x - 2) = \underbrace{x - 1}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x)} \\
\qquad -x^3 - 6x^2 + x + 6 \\
\qquad \underline{-(-x^3 - 2x^2 + x + 2)} \\
\qquad\qquad \underbrace{-4x^2 + 4}_{\text{ostatak}}
\end{array}
$$

Zatim se, pošto je ostatak $4x^2 + 4$ različit od nule, podeli delioc (u ovom slučaju $q(x)$) sa ostatkom.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (-4x^2 + 4) = \underbrace{-\tfrac{1}{4}x - \frac{1}{2}}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^3 - x)} \\
\qquad\quad 2x^2 - 2 \\
\qquad \underline{-(2x^2 - 2)} \\
\qquad\qquad\quad \underbrace{0}_{\text{ostatak}}
\end{array}
$$

Kako je sad ostatak jednak 0 sledi da je $NZD(p, q) = -4x^2 + 4$ (poslednji ostatak različit od nule).

$p(x)$
$x-a$
$p(a)$

Bezuova teorema: Ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$, $\deg(p(x)) > 0$, polinomom $x - \alpha$ je $p(\alpha)$, tj. vrednost polinoma $p(x)$ u tački α.

Primer: Odrediti ostatak pri deljenju polinoma

$$p(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 1$$

$p(x)$
$x-1$
$p(1)$

polinomom $x - 1$ i polinomom $x + 2$.
Primenom Bezuove teoreme ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $x - 1$ je

$$p(1) = -1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1 + 1 = \underline{1}.$$

$p(x)$
$x+2$
$p(-2)$

$p(x)$
$x-3$
$p(3)$

$x+5$
$p(-5)$

$x+7$
$p(-7)$

Analogno, ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $x + 2$ je

$$p(-2) = -(-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - (-2) + 1 = -29.$$

$x-a$

Hornerova šema: Pri deljenju polinoma n-tog stepena

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

polinomom $x - \alpha$, dobija se količnik $s(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ stepena $n-1$ i ostatak r, pri čemu je

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}, \ldots, b_0 = \alpha b_1 + a_1, r = \alpha b_0 + a_0.$$

Ovaj rezultat se zapisuje u obliku sledeće šeme koja se zove Hornerova šema.

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
\hline
\alpha & a_n & \alpha b_{n-1} + a_{n-1} & \alpha b_{n-2} + a_{n-2} & \cdots & \alpha b_1 + a_1 & \alpha b_0 + a_0 \\
 & \| & \| & \| & & \| & \| \\
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r
\end{array}$$

i polinom $p(x)$ se može zapisati u obliku

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) + r.$$

Primer: Odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma

$$\frac{p(x)}{x-2}$$

$$P(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$

$$p(2) = 3\cdot 8 + 4 - 4 + 1 = 25$$

polinomom $x - 2$.

Deljenjem polinoma:

$$
\begin{array}{l}
(3x^3 + x^2 - 2x + 1) : (x - 2) = 3x^2 + 7x + 12, \\
\underline{-(3x^3 - 6x^2)} \\
\qquad 7x^2 - 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(7x^2 - 14x)} \\
\qquad\qquad 12x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-(12x - 24)} \\
\qquad\qquad\qquad \boxed{25}
\end{array}
$$

$x-2$

	3	1	−2	1
2	3	7	12	25

$2\cdot 3 + 1$ $\quad$ $2\cdot 5 - 2$

dobija se količnik $3x^2 + 7x + 12$ i ostatak 25.

Traženi količnik i ostatak mogu se dobiti i primenom Hornerove šeme.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 1 & -2 & 1 \\
\hline
2 & 3 & 7 & 12 & \boxed{25} \\
 & \| & \| & \| & \| \\
 & b_2 & b_1 & b_0 & R
\end{array}$$

Deli se polinom trećeg stepena polinomom prvog stepena, tako da je količnik kvadratni polinom čiji su koeficijenti b_2, b_1 i b_0. Količnik je $3x^2 + 7x + 12$, ostatak je $R = 25$.
Ostatak se može dobiti i primenom Bezuove teoreme, kao vrednost polinoma za $x = 2$, ali na taj način se ne dobija količnik. Ostatak je $P(2) = 3 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 25$.

$$p(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1$$

$$x+1 = x - (-1)$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 \\
 & 3 & 0 & 2 & -1 & 1 \\
\hline
-1 & 3 & -3 & 5 & -6 & 7
\end{array}$$

$\underbrace{3 \quad -3 \quad 5 \quad -6}_{\text{koef. polinoma količnika}}$ $\quad 7$ ostatak

$$7 : 2 = 3$$

$$1$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$p(x) = (x+1)(3x^3 - 3x^2 + 5x - 6) + 7$$

Nula ili koren polinoma $p \in F[x]$ je nula odgovarajuće polinomske funkcije, tj. svako $\alpha \in F$ za koji važi da je $p(\alpha) = 0$.

Elemenat $\alpha \in F$ je koren (nula) polinoma $p \neq 0$, $\deg(p) = n \geq 1$ akko je polinom $p(x)$ deljiv polinomom $(x - \alpha)$,

Elemenat $\alpha \in F$ je **nula (koren) reda** k ($k \in \mathbb{N}$) polinoma $p \in F[x]$ akko je polinom $p(x)$ deljiv sa $(x - \alpha)^k$, a nije deljiv sa $(x - \alpha)^{k+1}$. Za nulu reda $k > 1$ kaže se da je višestruka, a nula reda $k = 1$ je jednostruka.

Primer: U polinomu $p(x) = (x - 5)^3(x + 2)^4$ broj 5 je koren reda 3 (trostruki koren), a broj -2 je koren reda 4(četvorostruki koren)

Polinom n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}$, ima tačno n korena u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, pri čemu se svaki koren računa onoliko puta kolika mu je višestrukost.

$$p(x) = (\underbrace{x-1}_{1})(\underbrace{x+1}_{-1})^3(\underbrace{x+2}_{-2})^4$$

Faktorisati polinom $p(x)$ koji je n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}$, nad poljem kompleksnih brojeva znači napisati ga u obliku

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni polinoma (x).

$p(x) = (x-1)(x+3)$ nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$

$p(x) = (x-1)(x^2+3)$ nad $\mathbb{R}$

Neka je p polinom nad poljem $\mathbb{R}$ (polinom sa realnim koeficijentima) i neka je α koren polinoma p, tada je i konjugovani broj $\overline{\alpha}$ takođe koren polinoma p.

$= (x-1)(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)$

$x^2+3=0$ za $x = \pm\sqrt{3}i$ → nad $\mathbb{C}$

Faktorisati polinom $p(x)$ koji je n-tog stepena, $n \in \mathbb{N}$, nad poljem realnih brojeva znači napisati ga kao proizvod polinoma prvog stepena i/ili polinoma drugog stepena koji nemaju realne korene. Dakle, činioci su polinomi oblika $ax + b$ i/ili $cx^2 + dx + e$, $d^2 - 4ce < 0$ za $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Dakle, u faktorizaciji polinoma nad poljem kompleksnih brojeva osim vodećeg koeficijenta mogu se pojaviti isključivo polinomi prvog stepena, dok se nad poljem realnih brojeva osim vodećeg koeficijenta mogu pojaviti polinomi prvog stepena i oni polinomi drugog stepena koji nemaju realne nule.

Teorema o racionalnim korenima: Neka je $\frac{p}{q}$ racionalan broj, gde su $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ uzajamno prosti brojevi i neka su koeficijenti polinoma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

celi brojevi, pri čemu je $a_n \cdot a_0 \neq 0$. Tada, ako je $\frac{p}{q}$ koren polinoma $p(x)$, onda p deli slobodan član a_0 (tj. $p | a_0$), a q deli koeficijent uz najveći stepen (tj. $q | a_n$).

$$\left.\begin{array}{l} p \mid a_0 \\ m \mid a_n \end{array}\right\} \quad \frac{p}{m}$$

$\{1, 2, 3\}$

Vijetove formule

Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

tada važi:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\
x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\
&\vdots \\
x_1 x_2 \ldots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

Specijalno:

- za polinom drugog stepena
$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
važi:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_2}, \\ x_1x_2 &= \frac{a_0}{a_2}, \end{aligned}$$
gde su x_1 i x_2 nule datog polinoma.
- za polinom trećeg stepena
$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
važi:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3}, \end{aligned}$$
gde su x_1, x_2 i x_3 nule datog polinoma.

Racionalna funkcija

Funkcija $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, gde su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi nad poljem realnih brojeva, naziva se **racionalna funkcija**.

Racionalne funkcije se dele na prave i neprave. **Prava** racionalna funkcija je ona kod koje je $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$, a **neprava** ona kod koje je $\deg(p(x)) \geq \deg(q(x))$.

Primer:

$r(x) = \dfrac{2x-1}{3x^2+5}$ je prava racionalna funkcija;

$r(x) = \dfrac{x^3+6}{x-1}$ je neprava racionalna funkcija;

$r(x) = \dfrac{x-7}{x+9}$ je neprava racionalna funkcija.

$$(x^3+6) : (x-1) = x^2+x+1$$
$$\underline{-(x^3-x^2)}$$
$$x^2+6$$
$$\underline{-(x^2-x)}$$
$$x+6$$
$$\underline{-(x-1)}$$
$$7$$

$$r(x) = \frac{x^3+6}{x-1} = x^2+x+1 + \frac{7}{x-1}$$

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije ili samo polinoma.
Prave racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

gde $A, B, C, a, p, q \in \mathbb{R},\ k, m \in \mathbb{N}$ i $p^2 - 4q < 0$, nazivaju se **parcijalni razlomci**.

Svaka prava racionalna funkcija može se predstaviti u obliku zbira parcijalnih razlomaka.

Rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne razlomke

- Ukoliko je racionalna funkcija **neprava** vrši se deljenje polinoma u brojiocu sa polinomom u imeniocu. Nakon deljenja dobija se polinom ili zbir polinoma i prave racionalne funkcije.
- **Faktoriše** se polinom u imeniocu prave racionalne funkcije nad poljem realnih brojeva (faktori su linearni ili kvadratni koji nemaju realne nule).
- Prava racionalna funkcija **rastavlja se na zbir parcijalnih razlomaka**. Posmatraju se faktori imenioca prave racionalne funkcije.
  - Faktor oblika $(x-a)^k$ daje sledećih k sabiraka parcijalnih razlomaka sa konstantama u brojiocima:

$$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

  - Faktor oblika $(x^2+px+q)^m$, $p^2-4q<0$, daje sledećih m sabiraka parcijalnih razlomaka sa opštim linearnim polinomima u brojiocima:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, \dots, \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Primer: Na sledećim pravim racionalnim funkcijama, sa faktorisanim imeniocima prikazano je kako se vrši rastavljanje na zbir parcijalnih razlomaka.

$$\frac{x^2-5x+3}{(x+4)(x-3)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2},$$

$$\frac{2x^2+4x-3}{(x+1)x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2},$$

$$\frac{3x^3+x+7}{(x^2+4)(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2},$$

$$\frac{5x^4+3x-7}{(x^2+5)^2(x-7)} = \frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+D}{(x^2+5)^2} + \frac{E}{(x-7)},$$

$$\frac{2x^3+3}{(x+1)^3(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{(x^2+3)}.$$

Nepoznate konstante određuju se tako što se cela jednakost pomnoži sa imeniocem prave racionalne funkcije i potom se izjednače koeficijenti uz iste stepene promenljive sa leve i desne strane.

$$\frac{1}{(x-3)^{2}(x+5)^{3}} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2} + \frac{E}{(x+5)^3}$$

$$\frac{1}{(x+2)^{2}(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$x^2+4=0$$

$$x=\pm 2i$$