Bulova algebra

November 14, 2023

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ uređena šestorka u kojoj je B neprazan skup, $+$ i $\cdot$ dve binarne operacije skupa B, $'$ unarna operacija skupa B, a 0 i 1 dva različita elementa (konstante) skupa B. Tada je $\mathcal{B}$ **Bulova algebra** ako za svako $a, b, c \in B$ važe

AKSIOME BULOVE ALGEBRE:

BA1: *komutativnost*

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a;$$

BA2: *distributivnost*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c);$$

BA3: *neutralni element*

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a;$$

BA4: *inverzni element (komplement)*

$$a + a' = 1, \quad a \cdot a' = 0.$$

U svakoj Bulovoj algebri je broj elemenata oblika 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, ne postoji Bulova algebra sa na primer 6 elemenata, već samo sa 2, 4, 8, 16, ... elemenata.

Princip dualnosti: Dva tvrđenja su dualna ako se jedno iz drugog može dobiti zamenom svih pojavljovanja $+$ sa $\cdot$, $\cdot$ sa $+$, 0 sa 1 i 1 sa 0.
Može se primetiti da su sve aksiome Bulove algebre dualne. Zbog toga će i sve teorema Bulove algebre biti dualane. To znači da ako se dokaže neka teorema time je automatski dokazana i njoj dualna teorema.

OSNOVNE TEOREME BULOVE ALGEBRE $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

BT1: *zakon idempotentnosti*

$$a + a = a, \quad a \cdot a = a;$$

BT2: *ograničenost*

$$a + 1 = 1, \quad a \cdot 0 = 0;$$

BT3: *apsorbcija*

$$a + a \cdot b = a, \quad a \cdot (a + b) = a;$$

BT4:

$$a + a' \cdot b = a + b, \quad a \cdot (a' + b) = a \cdot b;$$

BT5: *asocijativnost*

$$(a + b) + c = a + (b + c)\,, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,;$$

BT6: *jedinstvenost komplementa*

$$(a + x = 1 \ \wedge \ a \cdot x = 0) \Longrightarrow x = a';$$

BT7: *involucja*

$$(a')' = a;$$

BT8:

$$0' = 1, \quad 1' = 0;$$

BT9: *De Morganovi zakoni*

$$(a + b)' = a' \cdot b', \quad (a \cdot b)' = a' + b'.$$

Dokaz:

BT1: $a + a = a$

$$a \overset{BA3}{=} a + 0 \overset{BA4}{=} a + a \cdot a' \overset{BA2}{=} (a + a) \cdot (a + a') \overset{BA4}{=} (a + a) \cdot 1 \overset{BA3}{=} a + a;$$

BT2: $a + 1 = 1$

$$a{+}1 \overset{BA3}{=} (a + 1){\cdot}1 \overset{BA1}{=} 1{\cdot}(a + 1) \overset{BA4}{=} (a + a'){\cdot}(a + 1) \overset{BA2}{=} a{+}a'{\cdot}1 \overset{BA3}{=} a{+}a' \overset{BA4}{=} 1;$$

BT3: $a + a \cdot b = a$

$$a + a \cdot b \overset{BA3}{=} a \cdot 1 + a \cdot b \overset{BA2}{=} a \cdot (1 + b) \overset{BA1}{=} a \cdot (b + 1) \overset{BT2}{=} a \cdot 1 \overset{BA3}{=} a;$$

BT4: $a + a' \cdot b = a + b$

$$a + a' \cdot b \overset{BA2}{=} (a + a') \cdot (a + b) \overset{BA4}{=} 1 \cdot (a + b) \overset{BA1}{=} (a + b) \cdot 1 \overset{BA3}{=} a + b;$$

BT5: $(a+b)+c = a+(b+c)$

$$(a+b)+c \overset{BA3}{=} ((a+b)+c)\cdot 1 \overset{BA4}{=} ((a+b)+c)\cdot(a+a')$$
$$\overset{BA1,\,BA2}{=} (a\cdot(a+b)+a\cdot c)+(a'\cdot(a+b)+a'\cdot c)$$
$$\overset{BT3,\,BA2}{=} (a+a\cdot c)+((a'\cdot a+a'\cdot b)+a'\cdot c)$$
$$\overset{BA1,\,BT3,\,BA4}{=} a+((0+a'\cdot b)+a'\cdot c)$$
$$\overset{BA1,\,BA3}{=} a+(a'\cdot b+a'\cdot c) \overset{BA2}{=} a+a'\cdot(b+c) \overset{BT4}{=} a+(b+c)\,;$$

BT6: $(a+x=1 \ \wedge\ a\cdot x=0) \Longrightarrow x=a'$
Neka je $a+x=1 \ \wedge\ a\cdot x=0$.

$$x \overset{BA3}{=} x\cdot 1 \overset{BA4}{=} x\cdot(a+a') \overset{BA2}{=} x\cdot a+x\cdot a' \overset{BA1}{=} a\cdot x+a'\cdot x \overset{pp.}{=} 0+a'\cdot x$$
$$\overset{BA4}{=} a\cdot a'+a'\cdot x \overset{BA1}{=} a'\cdot a+a'\cdot x \overset{BA2}{=} a'\cdot(a+x) \overset{pp.}{=} a'\cdot 1 \overset{BA3}{=} a';$$

BT7: $(a')'=a$
Iz BA4 sledi

$$a+a'=1 \ \wedge\ a\cdot a'=0 \overset{BA1}{\Longrightarrow} a'+a=1 \ \wedge\ a'\cdot a=0 \overset{BT6}{\Longrightarrow} a=(a')'\,;$$

BT8: $0' = 1$
Iz BT2 i BA3 sledi

$$0 + 1 = 1 \ \wedge \ 0 \cdot 1 = 0 \xRightarrow{BT6} 1 = 0';$$

BT9: $(a+b)' = a' \cdot b'$

$$\begin{aligned}(a+b) + a' \cdot b' &\overset{BA2}{=} ((a+b)+a') \cdot ((a+b)+b') \\ &\overset{BA1,\, BT5}{=} ((a+a')+b) \cdot (a+(b+b')) \\ &\overset{BA4}{=} (1+b) \cdot (a+1) \overset{BA1,\, BT2}{=} 1 \cdot 1 \overset{BA3}{=} 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b) \cdot a' \cdot b' &\overset{BA1,\, BA2}{=} a \cdot (a' \cdot b') + b \cdot (a' \cdot b') \\ &\overset{BA1,\, BT5}{=} (a \cdot a') \cdot b' + (b \cdot b') \cdot a' \\ &\overset{BA4}{=} 0 \cdot b' + 0 \cdot a' \overset{BA1,\, BT2}{=} 0 + 0 \overset{BA3}{=} 0.\end{aligned}$$

Dakle, $(a+b) + a' \cdot b' = 1 \ \wedge \ (a+b) \cdot a' \cdot b' = 0 \xRightarrow{BT6} (a+b)' = a' \cdot b'$.

U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ **relacija** $\leq \subseteq B^2$ definisana na sledeći način:

$$\forall\, a, b \in B,\ a \leq b \Longleftrightarrow a + b = b$$

je relacija poretka.

Dokaz:

Refleksivnost: $\forall\, a \in B,\ a \leq a$ jer je po BT1 $a + a = a$.

Antisimetričnost:
$a \leq b \ \wedge\ b \leq a \Longrightarrow a + b = b \ \wedge\ b + a = a \Longrightarrow a = b + a \overset{BA1}{=} a + b = b.$

Tranzitivnost:

$$\begin{aligned} & a \leq b \ \wedge\ b \leq c \Longrightarrow a + b = b \ \wedge\ b + c = c \\ & \Longrightarrow a + c = a + (b + c) \overset{BT5}{=} (a + b) + c = b + c = c \Longrightarrow a \leq c. \end{aligned}$$

Kada se govori o relaciji poretka Bulove algebre misli se na ovu relaciju. Pod Haseovim dijagramom Bulove algebre podrazumeva se Haseov dijagram ove relacije poretka. U odnosu na nju 0 je najmanji, a 1 najveći elemenat.

Podalgebra Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ je svaka Bulova algebra $\mathcal{B}_1 = (B_1, +, \cdot, ', 0, 1)$ gde je $B_1 \subseteq B$, a operacije iz $\mathcal{B}_1$ su restrikcije operacija iz $\mathcal{B}$.

Konstante 0 i 1 u podalgebri $\mathcal{B}_1$ su iste kao konstante 0 i 1 u Bulovoj algebri $\mathcal{B}$.

Svaka Bulova algebra ima trivijalne podalgebre $(\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$ i samu sebe.

PRIMERI BULOVIH ALGEBRI:

1. Bulova algebra iskaznog računa je uređena šestorka $(I, \vee, \wedge, \rceil, \perp, \top)$, gde je $I = \{\perp, \top\}$ i gde su $\vee$, $\wedge$ i $\rceil$ poznate operacije iskaznog racuna - disjunkcija, konjukcija i negacija. Umesto $\perp$, $\top$, $\vee$, $\wedge$ i $\rceil$ često se koriste redom oznake 0, 1, $+$, $\cdot$ i $'$.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $p \leq q$ akko $p \vee q \iff q$ akko $p \implies q$.

Ova Bulova algebra ima smo jednu trivijalnu podalgebru - samu sebe.

2. Bulova algebra "partitivni skup" je uređena šestorka $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, , \emptyset, A)$, gde je A proizvoljan neprazan skup, a $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup, skupa A.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $X \leq Y$ akko $X \cup Y = Y$ akko $X \subseteq Y$.

3. Bulova algebra delitelja broja 30 je uređena šestorka $\left(D_{30}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $x \leq y$ akko $NZS\,(x, y) = y$ akko $x \mid y$.

Podalgebre su osim trivijalnih $\left(D_{30}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$ i $\left(\{1, 30\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$ još i

$\left(\{1, 30, 2, 15\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$,
$\left(\{1, 30, 3, 10\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$ i
$\left(\{1, 30, 5, 6\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$.

Neka je n prirodan broj različit od 1 i neka je $D_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \mid n\}$ (skup svih delitelja broja n). Uređena šestorka $\left(D_n, NZS, NZD, \frac{n}{x}, 1, n\right)$ je Bulova algebra akko je $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, gde su p_1, p_2, …, p_n međusobno različiti prosti brojevi.

Primer: Da li je $\left(D_{18}, NZS, NZD, \frac{18}{x}, 1, 18\right)$ Bulova algebra?

Kako je $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ po prethodnom sledi da ovo nije Bulova algebra.

$(B, +, \cdot, ', 0, 1) \longrightarrow (P(A), \cup, \cap, \bar{\ }, \Phi, \mathcal{U})$

ZADACI

1. Koja od sledećih tvrđenja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$?

- $a + ab = a0'$;
- $a + 1 = 0'$;
- $a \cdot 1 = 0'$;
- $ab = (ab)'$;
- $a + a'b = a + b$;
- $1 \cdot 0 = 1'$;
- $a + b = (ab)'$;
- $ab = (a' + b')'$;
- $a(a + b) = a \cdot 0'$

$1 \cdot 0 = 1'$

$1 \cdot 0 = 0$

$0 = 0$

$\mathcal{U} \cap \Phi = \Phi$

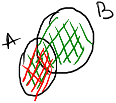
$(ab)' = a' + b'$

$(a' + b')' = a \cdot b$

$a(a+b) = a \cdot 0'$

$a(a+b) = \underbrace{\ }_{a}$

$A = A$



$a + ab = a0'$

$A \cup (A \cap B) = A \cap \overline{\Phi}$

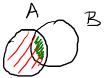
$A = A$

$0' = 1$

$1' = 0$

$a \cdot 1 = a$

$a + 0 = a$



$a + 1 = 1$

$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

$a \cdot 1 = 1$

$a = 1$

$(ab)' = a' + b'$

$(a')' = a$

$(a)' = a'$

$(a+b)' = a'b'$

$(ab)' = a' + b'$

$a + a'b = a + b$

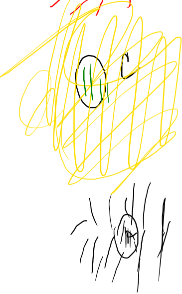
$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$

- $a + 1 = a$;

A

$1 = a$

$a + a' = a$



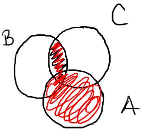
- $\overbrace{1 + c}^{1} = 1;$
- $\overbrace{1 \cdot 0}^{} = 1;$
- $a + a' = a;$
- $a' + a' = a';$
- $\underbrace{a + bc}_{} = (a + b)(a + c);$
- $\overbrace{1 + c}^{1} = 0;$
- $a \cdot 0 = 0;$
- $\overbrace{a + a'}^{1} = 0;$
- $a' \cdot a' = a';$
- $a \leq 1;$ $a + 1 = 1$
- $a \leq 0.$ $a + 0 = 0$

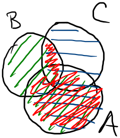
$1 \cdot a = a \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$

$a \cdot 0 = 0 \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$

$U \cap \emptyset = \emptyset$

$\boxed{X \leq Y \Leftrightarrow X + Y = Y}$





$a \leq 1 \Leftrightarrow a + 1 = 1$

$a \leq 0 \Leftrightarrow a + 0 = 0$

$a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$

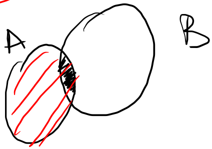
$a \leq a+b \iff a+(a+b)=a+b$

$(a+a)+b=a+b$

$a+b=a+b$

$a \cdot b \leq a \iff a \cdot b + a = a$

$a = a$



$p \Longleftrightarrow q$ акко $p \Rightarrow q \ \wedge \ q \Rightarrow p$

$(a) \Longleftrightarrow (b)$

$(a) \Longleftrightarrow (c)$

$(a) \Longleftrightarrow (d)$

$(b) \Longleftrightarrow (c)$

$(b) \Longleftrightarrow (d)$

$(c) \Longleftrightarrow (d)$

$$\begin{tikzcd}
 & (a) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(d) \arrow[ur, Rightarrow] & & (b) \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & (c) \arrow[ul, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

2. Dokazati da su u svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$ sledeći iskazi ekvivalentni:

$$\boxed{x+y=y \iff x\le y}$$

(a) $xy=x$; (b) $x+y=y$; (c) $x'+y=1$; (d) $xy'=0$.

$(a)\Rightarrow(b)$: $\boxed{xy=x \Rightarrow x+y=y}$

VAŽI: $xy=x$

TREBA: $x+y=y$

$$x+y = xy+y = (x+1)y = 1\cdot y = y$$

$(b)\Rightarrow(c)$: $\boxed{x+y=y \Rightarrow x'+y=1}$

VAŽI: $x+y=y$

TREBA: $x'+y=1$

$$x'+y = x'+(x+y) = (x'+x)+y = 1+y = 1$$

$(c)\Rightarrow(d)$: $\boxed{x'+y=1 \Rightarrow xy'=0}$

VAŽI: $x'+y=1$

TREBA: $xy'=0$

$$xy' = (x')'\cdot y' = (x'+y)' = 1' = 0$$

ili: $0 = 1' = (x'+y)' = x\cdot y'$

$(d)\Rightarrow(a)$: $\boxed{xy'=0 \Rightarrow xy=x}$

VAŽI: $xy'=0$

TREBA: $xy=x$

$$\begin{aligned} xy &= xy+0 \\ &= xy+xy' \\ &= x(y+y') \\ &= x\cdot 1 \\ &= x \end{aligned}$$

$(B, +, \cdot, ', 0, 1)$
$(\{\perp, \top\}, \vee, \wedge, \neg, \perp, \top)$

BULOVI IZRAZI I POLINOMI

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra

$1, 0, x, y, z \in B$

$1+x,\ y \cdot z,\ x', z'$

Konstanta skupa B je proizvoljan elemenat skupa B. **Promenljiva** skupa B je simbol koji se može zameniti bilo kojim elementom skupa B.

Bulovi izrazi:

$(1+x) \cdot y$

1. Bulove promenljive i Bulove konstante su Bulovi izrazi.

$y \cdot z + 1$

2. Ako su A i B Bulovi izrazi onda su to i $(A + B)$, $(A \cdot B)$, A' i B'.

$x' + z' + y$

3. Bulovi izrazi se dobijaju konačnom primenom 1. i 2.

Primer: $\big((x' + y)' \cdot z\big)$ jeste Bulov izraz, dok $x + y' +$ nije Bulov izraz.

Monom je promenljiva ili njena negacija.

Primer: $x, y, z, u, x', y', z', u', \ldots$

Elementarna konjukcija (EK) je konjukcija (proizvod) monoma. Elemenat 1 Bulove algebre je elementarna konjukcija.

Primer: $x, xy', x'yzu, 1, \ldots$

$\{x, y, z\}$
MONOMI
x, y, z, x', y', z'
SEK: xyz, xyz', $x'y'z'$, $x'y'z$

$\{a, b\}$
MONOMI
a, b, a', b'
SEK: ab
ab'
$a'b$
$a'b'$

Disjunktivna normalna forma (DNF) je disjunkcija (zbir) konačno mnogo elementarnih konjukcija.

Primer: $xy' + x' + xyz$, xy', 1, ...

Savršena elementarna konjukcija u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je elementarna konjukcija u kojoj se javlja svaka od tih promenljivih (negirana ili ne).

Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF) u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je disjunktivna normalna forma u kojoj učestvuju samo (različite) savršene elementarne konjukcije u odnosu na te promenljive.

Primer: $xyz + x'yz + x'y'z$ je SDNF u odnosu na promenljive x, y, z.

Analogno se definišu elementadna disjunkcija (ED), konjuktivna normalna forma (KNF), savršena elementadna disjunkcija i savršena konjuktivna normalna forma (SKNF).

Svaki Bulov izraz se može svesti na DNF i ~~KNF~~ i pri tome DNF i ~~KNF~~ nisu jedinstveno određeni.

SDNF i ~~SKNF~~ su jedinstveno određeni u odnosu na zadati skup promenljivih koje se pojavljuju u izrazu.

$\{x, y, z\}$
MONOMI
x, y, z, x', y', z'
EK: x, y, yx', $y'z$, yzx, $xyzx'y'z'$
DNF
$x + y'z$, $yx' + yzx$, $xyzx'y'z' + y$

OPIS POSTUPKA NALAŽENJA DNF I SDNF:

1. Koristeći De Morganove zakone (BT9) i zakon involucije (BT7) oslobađa se delovanja komplementa na izraze u zagradama, tako da se dobije izraz kod kog komplement deluje samo na promenljive.

2. Koristeći distributivnost operacije $\cdot$ prema operaciji $+$ izraz se dovodi na oblik zbira konjukcija.

3. Koristeći zakone $aa = a$, $aa' = 0$ i $a + 0 = a$ i uklanjaju'i višestruka pojavljivanja jedne promenljive u jednoj konjukciji dobija se izraz u obliku DNF.

4. Da bi se od (bilo koje) DNF dobila SDNF svaku elementarnu konjukciju treba po potrebi proširiti promenljivama koje se u njoj ne pojavljuju.

5. Na kraju se samo još koristeći idempotentnost uklone sve savršene elementarne konjukcije koje se u zbiru pojavljuju više puta.

$(a \cdot b)' = a' + b'$

$(a+b)' = a' \cdot b'$

$(a')' = a$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

$1 = a + a'$

$a + a = a$

$$I = (x \cdot (y' + z'))' \cdot z + x'y'z'$$

PRVI KORAK

$$= (x' + (y' + z')') \cdot z + x'y'z'$$

$$= (x' + y \cdot z) \cdot z + x'y'z'$$

DRUGI KORAK

$$= x'z + yzz + x'y'z'$$

TREĆI KORAK

$$= \underline{x'z + yz + x'y'z} \leftarrow \text{DNF}$$

ČETVRTI KORAK

$$= x' \cdot 1 \cdot z + 1 \cdot yz + x'y'z'$$

$$= x'(y+y')z + (x+x')yz + x'y'z'$$

$$= \underline{x'yz} + x'y'z + xyz + x'\underline{yz} + x'y'z'$$

PETI KORAK

$$= \underline{x'yz + x'y'z + xyz + x'y'z'} \leftarrow \text{SDNF}$$

Primer: $I = (x \cdot (y' + z'))' \cdot z + x'y'z'$

1. Koristeći De Morganove zakone
$((a+b)' = a' \cdot b', \quad (a \cdot b)' = a' + b'.)$ i zakon involucije $((a')' = a;)$ oslobađamo se delovanja komplementa na izraze u zagradama, tako da se dobije izraz kod kog komplement deluje samo na promenljive.

$$I = \left(x' + (y' + z')'\right) \cdot z + x'y'z' = (x' + yz) \cdot z + x'y'z'.$$

2. Koristeći distributivnost operacije $\cdot$ prema operaciji $+$ izraz se dovodi na oblik zbira konjukcija.

$$I = x'z + yzz + x'y'z'.$$

3. Koristeći zakone $aa = a$, $aa' = 0$ i $a + 0 = a$ i uklanjaju'i višestruka pojavljivanja jedne promenljive u jednoj konjukciji dobija se izraz u obliku DNF

$$I = x'z + yz + x'y'z'.$$

4. Da bi se od (bilo koje) DNF dobila SDNF svaku elementarnu konjukciju treba po potrebi proširiti promenljivama koje se u njoj ne pojavljuju

$I = x'(y + y')z + (x + x')yz + x'y'z' = x'yz + x'y'z + xyz + x'yz + x'y'z'.$

5. Na kraju se samo još koristeći idempotentnost uklone sve savršene elementarne konjukcije koje se u zbiru pojavljuju više puta

$$I = x'yz + x'y'z + xyz + x'y'z'.$$

1. Svesti na DNF i SDNF sledeće Bulove izraze:

   1.1 $I_1 = x(y'z)'$;

DNF

$$I_1 = x(y'z)' = x(y+z') = \boxed{xy + xz'}$$

$$= xy \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot z' = xy(z+z') + x(y+y')z'$$

$$= xyz + \underline{xyz'} + \underline{xyz'} + xy'z'$$

$$= \boxed{xyz + xyz' + xy'z'}$$

SDNF

1.2 $I_2 = z\,(x' + y) + y'$;

DNF

$$I_2 = z(x'+y)+y' = \boxed{x'z + yz + y'}$$

$$= x'\cdot 1\cdot z + 1\cdot y\cdot z + 1\cdot y'\cdot 1$$

$$= x(y+y')z + (x+x')yz + (x+x')y'(z+z')$$

$$= xyz + xy'z + xyz + x'yz + xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z'$$

$$= \boxed{xyz + xy'z + x'yz + xy'z' + x'y'z + x'y'z'}$$

SDNF

1.3 $I_3 = (x + y'z)(y + z')$;

$$I_3 = (x+y'z)(y+z') = xy + xz' + \underbrace{\cancel{yy'}}_{}{}^{0}z + y'\underbrace{\cancel{zz'}}_{}{}^{0}$$

$$= xy + xz' + 0z + y'0 = xy + xz' + 0 + 0$$

$$= \boxed{xy + xz'} = xy \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot z'$$

DNF

$$= xy(z+z') + x(y+y') \cdot z'$$

$$= xyz + \underline{xyz'} + \underline{xyz'} + xy'z'$$

$$= xyz + xyz' + xy'z'$$

$$A \cap \overline{A} = \phi$$

1.4 $I_4 = (x' + y)' + y'z;$

DNF

$$I_4 = (x'+y)' + y'z = \boxed{x \cdot y' + y'z}$$

$$= xy' \cdot 1 + 1 \cdot y'z = xy'(z+z') + (x+x')y'z$$

$$= \underline{xy'z} + xy'z' + \underline{xy'z} + x'y'z$$

$$= xy'z + xy'z' + x'y'z$$

1.5 $I_5 = (x+y)'(xy')'$;

x, y

$$I_5 = (x+y)' \cdot (xy')' = x' \cdot y' \cdot (x'+y)$$

$$= x'y'x' + x'\cancel{y'y}_{0} = \boxed{x'y'}$$

DNF, SDNF NA $\{x, y\}$

DA JE DAT SKUP $\{x, y, z\}$

$$= x'y'(z+z') = x'y'z + x'y'z'$$

1.6 $I_6 = y\,(x + yz)'$;

1.7 $I_7 = (x + y)(x' + y)\,z.$

BULOVE FUNKCIJE

Bulova funkcija od n promenljivih je svako preslikavanje $f : B^n \longrightarrow B$.

$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

Na dalje će se posmatrati samo Bulove funkcije definisane na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.

Svaki Bulov izraz jednoznačno određuje Bulovu funkciju, a jednoj Bulovoj funkciji odgovara više (beskonačno mnogo) ekvivalentnih Bulovih izraza.

Ako je $f(x_1, \ldots, x_n)$ Bulova funkcija, definisana na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$, tada se SDNF (SKNF) mogu konstruisati na sledeći način:

$$\boxed{\mathrm{SDNF}(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},}$$

$$\mathrm{SKNF}(f(x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} \left(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + x_1^{\neg\alpha_1} + \ldots + x_n^{\neg\alpha_n}\right),$$

$$\boxed{\text{gde je } x^{\alpha} = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ x', & \alpha = 0 \end{cases}.}$$

$X^1 = X \qquad X^0 = X'$

Primer:

$$SDNF(f(x,y)) = x'y + xy$$

	x	y	$f(x,y)$
	~~0~~	~~0~~	~~0~~
a)	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
	~~1~~	~~0~~	~~0~~
	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

$$\begin{aligned} \mathrm{SDNF}(f(x,y)) &= 0 \cdot x^0 \cdot y^0 + 1 \cdot x^0 \cdot y^1 + 0 \cdot x^1 \cdot y^0 + 1 \cdot x^1 \cdot y^1 \\ &= x'y + xy, \end{aligned}$$

$$SDNF(f(x,y)) = \cancel{0 \cdot x^0 y^0}^{\,0} + 1 \cdot x^0 y^1 + \cancel{0 \cdot x^1 \cdot y^0}^{\,0} + 1 \cdot x^1 y^1$$

$$= x^0 y^1 + x^1 y^1 = x' y + x y$$

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	1	1

$$SDNF(f(x,y)) = x'y' + x'y + xy$$

b)

x	y	z	$f(x,y)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\mathrm{SDNF}\,(f\,(x,y,z)) = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz,$$

$$\mathrm{SDNF}(f(x,y,z)) = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz$$

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$SDNF(f(x,y,z)) = x'y'z' + x'y'z + xy'z' + xyz'$

DNF Φ_1 je **prostija** od DNF Φ_2 akko je broj mooma od Φ_1 manji ili jednak broju monoma od Φ_2 i ako je broj elementarnih konjukcija u Φ_1 manji ili jednak broju elementarnih konjukcija u Φ_2, gde je bar jedna od pomenutih nejednakosti striktna.

Minimalna disjunktivna normalna forma (MDNF) je ona od koje ne postoji prostija koja određuje istu Bulovu funkciju.

Za određivanje MDNF koriste se Karnoove karte.

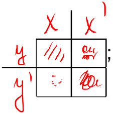
$$\left\{ \begin{array}{l} DNF_1(f(x,y)) = x'y + x \\ DNF_2(f(x,y)) = x'y + xy + xy' \end{array} \right\}$$

$$DNF_2(f(x,y)) = x'y + xy + xy' = x'y + x(y+y') = x'y + x \cdot 1 = x'y + x = DNF_1(f(x,y))$$

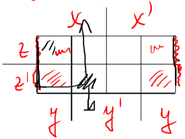
$DNF_1(f(x,y)) = xz + x'z' + xy'$

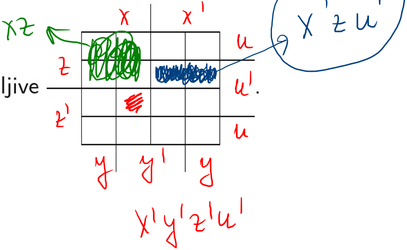
$DNF_2(f(x,y)) = xz + x'z' + yz'$

Izgled Karnoovih karata:

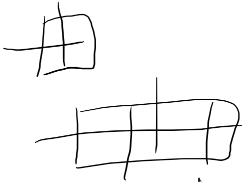
1. sa dve promenljive 

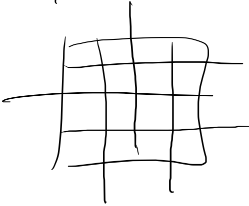
;

2. sa tri promenljive 

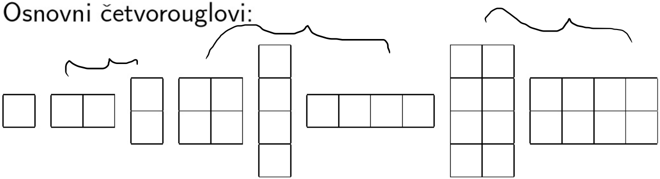
3. sa četiri promenljive 

.

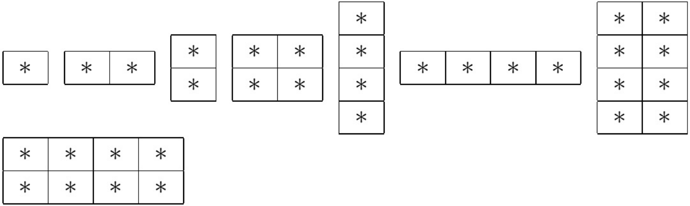


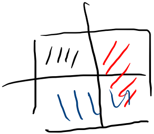


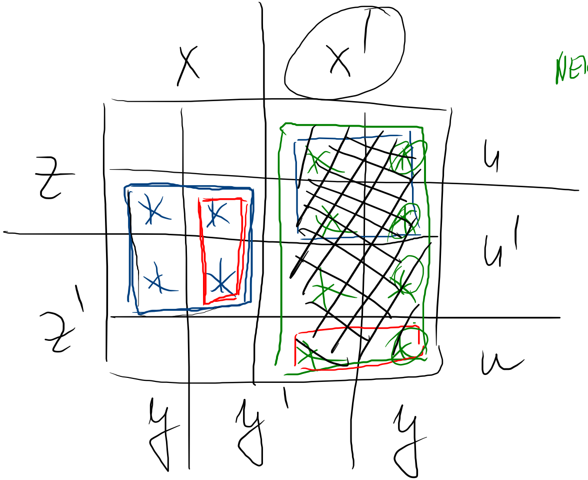
Osnovni četvorouglovi:



Osnovni obeleženi četvorouglovi:







NEKE PI: xu', x'

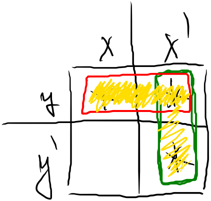
Maksimalni obeleženi osnovni četvorougao je onaj osnovni obeleženi četvorougao koji se ne sadrži ni u jednom drugom osnovnom obeleženom četvorouglu.

Maksimalnom obeleženom osnovnom četvorouglu jednoznačno odgovara jedna prosta implikanta.

MDNF se dobija tako što se uzme minimalan broj maksimalnih obeleženih osnovnih četvorouglova (prostih implikanti) takvih da je sa njima prekriveno svako obeleženo polje i napravi se njihova disjunkcija.

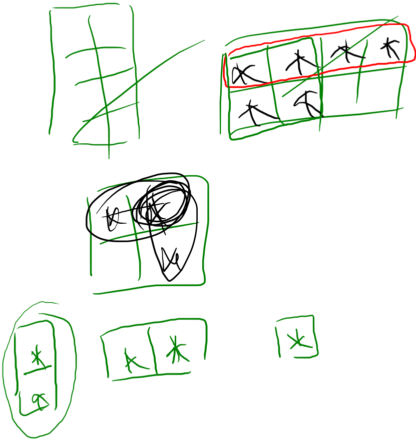
Primer:

a) $f(x, y) = xy + x'y + x'y',$



PI: x', y

$MDNF(f(x,y)) = y + x'$



b) $f(x, y, z) = xyz + xy'z + xyz' + x'y'z'$, c)

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

.

x	y	z	u	$f(x,y,z,u)$