$A \neq \emptyset$

$*$ - ZATVORENA (BINARNA) OPERACIJA

$\forall x, y \in A, \; x * y \in A$

$(A, *)$ GRUPOID

$\bigcirc * x = e$

NEUTRALNI EL. $\exists e \in A, \; \forall x \in A, \; e * x = x$ (LEVI)

$x * e = x$ (DESNI)

INVERZNI EL. $\forall x \in A, \exists x' \in A, \; x' * x = e$ (LEVI)

$x * x' = e$ (DESNI)

$(\mathbb{R}, +)$

$\boxed{-x} + \boxed{x} = 0$

$-2 + 2 = 0$

$-5 + 5 = 0$

$3 + (-3) = 0$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

$\boxed{\frac{1}{x}} \cdot \boxed{x} = 1$

$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

Primer: Neka je $A = \{a, b, c, d\}$, i neka je operacija $*$ skupa A zadata Kejlijevom tablicom

GRANIČNA VRSTA

GRANIČNA KOLONA

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	d

GLAVNA DIJAGONALA

$A \neq \emptyset$

ZATVORENOST ✓ $\Big\}$ $(A, *)$ JE GRUPOID

KOMUTATIVNOST: ✓

IDEMPOTENTNOST: ✓

$1 \cdot 1 = 1$

$0 + 0 = 0$

NEUTRALNI EL. JE $\boxed{c}$

INVERZNI EL. NEMA SVAKI ELEMENAT $\quad c * c = c$

$2 \cdot x = 2 \cdot y$

$x = y$

$x \cdot 2 = 2 \cdot y$

NILPOTENTNI EL. JE $\boxed{b}$

KANCELACIJA $\quad \left.\begin{array}{l} a * a = a \\ a * c = a \end{array}\right\} \quad \cancel{a} * a = \cancel{a} * c \Rightarrow a = c$

ASOCIJATIVNOST $\quad \forall x, y, z \in A, \quad \boxed{x * (y * z) = (x * y) * z}\ ?$

$4 \quad 4 \quad 4$

$3 \quad 3 \quad 3$

$2 \quad 2 \quad 2$

$4^3 = 64$

$x, y, z = c$ ✓

$3^3 = 27$

$x, y, z = b$ ✓

$2^3 = 8$

$\{a, d\}$

$(2-2)-2=-2$

$2-(2-2)=2-0=2$

$2\ ,\ -$

$(2-2)-2=-2$

$2-(2-2)=2$

$a*\overbrace{(\overbrace{a*a}^{a})}^{a}=\overbrace{(\overbrace{a*a}^{a})*a}^{a}$ w

$a*(a*d)=(a*a)*d$ w

$a*(d*a)=(a*d)*a$

$a*(d*d)=(a*d)*d$

$d*(d*d)=(d*d)*d$

$\boxed{d*(d*a)=(d*d)*a}$

b $\quad d*(a*d)=(d*a)*d \quad$ b

$d*(a*a)=(d*a)*a$

$2-(5-4)=2-1=1$

$(2-5)-4=-3-4=-7$

*	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	d

$d*(d*a)=d*b=b$

$(d*d)*a=d*a \quad b$ w

$2\cdot(3\cdot5)=2\cdot15=30$

$d*(a*d)=d*b=b$

$(d*a)*d=b*d=b$

- zatvorenost: u tablici se javljaju samo elementi skupa $A \neq \emptyset$, pa $(A, *)$ jeste grupoid;
- komutativnost: tablica je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu pa grupoid $(A, *)$ jeste komutativan;
- idempotentnost: na glavnoj dijagonali su poređani elementi skupa A baš onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni pa grupoid $(A, *)$ jeste idempotentan;
- neutralni elemenat: elemenat $c \in A$ je neutralni elemenat grupoida $(A, *)$ jer je njegova vrsta jednaka graničnoj vrsti, a njegova kolona jednaka graničnoj koloni;

- inverzni elemenat: osim elementa c koji je sam sebi inverzan ($c * c = c$) ostali elementi nemaju inverzne;
- nilpotentni elemenat: elemenat $b \in A$ je nilpotentni elemenat jer se cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa njim samim;

  $b * a = b * d$
- grupoid $(A, *)$ nije kancelativan jer je recimo $\cancel{ba = bd \text{ a }} a \neq d$ (što se vidi iz tablice ali se nije moglo zaključiti na osnovu nje);
- da bi se ispitala asocijativnost grupoida $(A, *)$ potrebno je proveriti jednakost
  $$x * (y * z) = (x * y) * z$$
  za sve $x, y, z \in A$, što bi bilo $4^3 = 64$ slučaja.
  Kako je c neutralni elemenat, ako bar jedna promenljiva (x, y ili z) ima vrednost c, jednakost $x * (y * z) = (x * y) * z$ će biti zadovoljena jer c kao neutralni elemenat ne utiče na rezultat operacije.

- Sad ostaje da se proveri još $3^3 = 27$ slučajeva.
  Kako je b nilpotentni elemenat, ako bar jedna promenljiva (x, y ili z) ima vrednost b, jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ će biti zadovoljena jer će izrazi na levoj i desnoj strani jednakosti imati vrednost b.
  Ostaje da se proveri još $2^3 = 8$ slučajeva.
  Ovo se može proveriti direktno očitavanjem iz tablice

  $$\begin{array}{ll} a*(a*a) = a = (a*a)*a, & a*(a*d) = b = (a*a)*d, \\ a*(d*a) = b = (a*d)*a, & a*(d*d) = b = (a*d)*d, \\ d*(a*a) = b = (d*a)*a, & d*(a*d) = b = (d*a)*d, \\ d*(d*a) = b = (d*d)*a, & d*(d*d) = d = (d*d)*d, \end{array}$$

  pa grupoid $(A,*)$ jeste asocijativan.

ZADACI

1. Ispitati koje osobine ima grupoid $(G, *)$ ako je $G = \{a, b, c\}$, a operacija $*$ je data tablicom

$*$	a	b	c
a	c	a	a
b	a	b	c
c	b	c	b

$(G, *)$ JE GRUPOID JER $G \neq \emptyset$!

VAŽI ZATVORENOST ✓

KOMUTATIVNOST: —

IDEMPOTENTNOST: —

$x' * x = e$

$x * x' = e$

N.E.: b JE N.E.

I.E. NEMA SVAKI EL. INVERZNI JER - - - - -

$(\mathbb{Z}, -)$

$2 - 0 = 2$

$0 - 2 = -2$

$b * b = b$ b - JE SAM SEBI INVERZNI

$c * c = b$ c - JE SAM SEBI INVERZNI

$c * a = b$ c - JE LEVI INVERZNI ZA a

a - JE DESNI INVERZNI ZA c

SAMO a NEMA DESNI INVERZNI

NILPOTENTNI EL. —

KANCELACIJA:

$$\left.\begin{aligned} a*b&=a \\ a*c&=a \end{aligned}\right\} \quad \cancel{a}*b=\cancel{a}*c \longrightarrow b=c$$

$$\perp$$

ASOCIJATIVNOST

N.E.

$*$	a	b	c
a	c	a	a
b	a	b	c
c	b	c	b

$$\underbrace{(\underbrace{a*b}_{a})*c}_{a} = \underbrace{a*(\underbrace{b*c}_{c})}_{a} \quad ✓$$

$$\underbrace{(\underbrace{a*b}_{a})*b}_{a} = \underbrace{a*(\underbrace{b*b}_{b})}_{a} \quad ✓$$

$$\boxed{\underbrace{(\underbrace{a*a}_{c})*a}_{b} \neq \underbrace{a*(\underbrace{a*a}_{c})}_{a}} \quad \perp$$

KOMUTATIVNOST: nije komutativan jer tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu;
IDEMPOTENTNOST: nije idempotentan jer na glavnoj dijagonali nisu podeđani elementi istim redosledom kao u graničnoj vrsti (koloni);
NEUTRALNI ELEMENAT: je b jer je vrsta elementa b jednaka graničnoj vrsti, a kolona graničnoj koloni;
INVERZNI ELEMENAT: ne postoji za sve elemente jer se neutralni elemenat ne javlja u svakoj vrsti i svakoj koloni tačno jednom (simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu),
$b * b = b$ pa je elemenat b sam sebi inverzan,
$c * c = b$ pa je i elemenat c sam sebi inverzan,
kako je $c * a = b$ to je c levi inverzni elemenat za a, a a je desni inverzni za c ali a nema desni inverzni elemenat;
NILPOTENTNOST: ne postoji nilpotentni elemenat jer ni za jedan elemenat skupa G ne važi da je cela njegova vrsta (kolona) jednaka njemu samom;
KANCELACIJA: nije kancelativa jer je recimo
$a * b = a * c = a$, a $b \neq c$;
ASOCIJATIVNOST: nije asocijativan jer je recimo
$a * (a * a) = a * c = a$, a $(a * a) * a = c * a = b$.

2. Ispitati koje osobine ima grupoid $(G, *)$ ako je $G = \{a, b, c, d\}$, a operacija $*$ je data tablicom

$*$	a	b	c	d
a	a	d	b	c
b	c	b	d	a
c	d	a	c	b
d	b	c	a	d

.

KOM. —

IDM. +

N.E. —

I.E. — NEMA N.E.

NILPOTENTNI. —

ASOCIJATIVNOST:

$$a*(b*c) = (a*b)*c$$
$$a*d = d*c$$
$$c = a$$
$$\perp$$

KANCELACIJA

KOMUTATIVNOST: nije komutativan jer tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu;
IDEMPOTENTNOST: jeste idempotentan jer su na glavnoj dijagonali podeđani elementi skupa G istim redosledom kao u graničnoj vrsti (koloni);
NEUTRALNI ELEMENAT: nema jer ne postoji nijedan elemenat čija je vrsta jednaka graničnoj vrsti, a kolona graničnoj koloni;
INVERZNI ELEMENAT: ne postoji jer nema neutralni elemenat;
NILPOTENTNOST: ne postoji nilpotentni elemenat jer ni za jedan elemenat skupa G ne važi da je cela njegova vrsta (kolona) jednaka njemu samom;
KANCELACIJA: jeste kancelativan jer se ni u jednoj vrsti ili koloni ne ponavljaju elementi;
ASOCIJATIVNOST: nije asocijativan jer je recimo
$b * (a * c) = b * b = b$, a $(b * a) * c = c * c = c$.

$(G, *)$

$\emptyset \neq A \subseteq G$

$(A, *)$

$(\mathbb{R}, +)$

$\emptyset \neq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$(\mathbb{Z}, +)$

$\emptyset \neq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

$(\mathbb{N}, +)$

$\emptyset \neq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

3. Naći sve podgrupoide grupida $(G, *)$ ako je $G = \{a, b, c, d\}$, a operacija $*$ je data tablicom

$*$	a	b	c	d
a	b	a	a	a
b	b	b	d	c
c	c	b	d	d
d	d	b	d	d

.

$\mathcal{P}(G) = \{\cancel{\{a\}}, \{b\}, \cancel{\{c\}}, \{d\}, \{a,b\}, \cancel{\{a,c\}}, \cancel{\{a,d\}}, \cancel{\{b,c\}}, \cancel{\{b,d\}}, \{c,d\}, \cancel{\{a,b,c\}}, \cancel{\{a,b,d\}}, \cancel{\{a,c,d\}}, \{b,c,d\}, G, \cancel{\emptyset}\}$

$\cancel{(\{a\}, *)}$

$*$	a
a	b

$(\{b\}, *)$

$*$	b
b	b

$\cancel{(\{c\}, *)}$

$*$	c
c	d

$(\{d\}, *)$

$*$	d
d	d

$(\{a,b\}, *)$

$\cancel{(\{a,c\}, *)}$

$\cancel{(\{a,d\}, *)}$

$\cancel{(\{b,c\}, *)}$

$b * c = d \notin \{b, c\}$

$\cancel{(\{b,d\}, *)}$

$b * d = c \notin \{b, c\}$

$(\{c,d\}, *)$

$\cancel{(\{a,b,c\}, *)}$

$c * c = d \notin \{a, b, c\}$

$\cancel{(\{a,b,d\}, *)}$

$b * d = c \notin \{a, b, d\}$

$\cancel{(\{a,c,d\}, *)}$

$(\{b,c,d\}, *)$

$(G, *)$

4. Dat je grupoid $(\{1,2,3,4\},*)$ gde je operacija $*$ definisana sa

$$x * y = min\{x,y\}.$$

$*$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	2	3	3
4	1	2	3	4

4.1 Ispitati osobine datog grupoida.

4.2 Naći sve podgrupoide datog grupoida.

4.1.

$(\{1,2,3,4\},*)$ je grupoid jer $\{1,2,3,4\} \neq \emptyset$ i u tablici se pojavljuju samo elementi skupa $\{1,2,3,4\}$, pa važi zatvorenost.

1) KOMUTATIVNOST: važi jer je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.

2. IDEMPOTENTNOST: važi jer su elementi na glavnoj dijagonali raspoređeni isto kao u graničnoj vrsti (koloni).

3. NEUTRALNI EL. je 4 jer je njegova vrsta (kolona) jednaka graničnoj vrsti (koloni).

4. INVERZNI EL. nema svaki element (samo 4 ima jer je $4*4=4$) jer nema neutralnog u svakoj vrsti (koloni).

5. NILPOTENTNI EL. je 1 jer je njegova vrsta (kolona) jednaka njemu samom.

6. KANCELACIJA: $\left.\begin{array}{l} 1*1=1 \\ 1*2=1 \end{array}\right\} 1*1=1*2 \Rightarrow 1=2$ $\perp$

7. ASOCIJATIVNOST: minimum je asocijativna operacija uvek

4.2. Koliko je za bilo koji podskup skupa $\{1,2,3,4\}$ operacija $*$ zatvorena (jer je minimum dva broja jedan od njih) svi neprazni podskupovi skupa $\{1,2,3,4\}$ u odnosu na operaciju $*$ će biti podgrupoidi.

NAPOMENA

$$(\{1,2,3,4\}, *)$$

$$x * y = \begin{cases} 3 & x = y \\ \min\{x,y\}, & x \neq y \end{cases}$$

$*$	1	2	3	4
1	3	1	1	1
2	1	3	2	2
3	1	2	3	3
4	1	2	3	3

4.1 KOMUTATIVNOST: jeste komutativan jer tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu;
IDEMPOTENTNOST: jeste idempotentan jer su na glavnoj dijagonali poređani elementi skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ istim redosledom kao u graničnoj vrsti (koloni);
NEUTRALNI ELEMENAT: je 4 jer je vrsta elementa 4 jednaka graničnoj vrsti, a kolona graničnoj koloni;
INVERZNI ELEMENAT: nijedan elemenat osim elementa 4 (koji je sam sebi inverzan) nema inverzni elemenat jer se neutralni elemenat (4) ne javlja ni u jednoj drugoj vrsti ili koloni;
NILPOTENTNOST: broj 1 je nilpotentni elemenat jer je cela njegova vrsta (kolona) jednaka njemu samom;
KANCELACIJA: nije kancelativan jer je recimo
$2 * 2 = 2 * 3 = 2$, a $2 \neq 3$;
ASOCIJATIVNOST: jeste asocijativan jer je operacija minimum asocijativna operacija.

4.2 Svi neprazni podskupovi skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ zajedno sa gore definisanom operacijom $*$ su podgrupoidi.

5. Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je operacija $*$ sa

$2*5 = 2+5+3 = 10$

$3*(-4) = 3+(-4)+3 = 2$

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \boxed{a * b = a + b + 3,}$$

gde je $+$ operacija sabiranja. Ispitati algebarsku sturkturu $(\mathbb{R}, *)$.

1) $\mathbb{R} \neq \emptyset$

2) ZATVORENOST: $\boxed{\forall x,y \in \mathbb{R},\ x*y \in \mathbb{R}}$?

$x*y = x+y+3 \in \mathbb{R}$ jer je zbir 3 realna broja uvek realan broj

3) KOMUTATIVNOST: $\forall x,y \in \mathbb{R},\ \boxed{x*y = y*x}$?

$x*y = x+y+3$ ‖ jer za operaciju sabiranja važi komutativnost

$y*x = y+x+3$

4) ASOCIJATIVNOST: $\forall x,y,z \in \mathbb{R},\ \boxed{x*(y*z) = (x*y)*z}$?

$x*(\overset{a}{y}*\overset{b}{z}) = \overset{a}{x}*(\overbrace{y+z+3}^{b}) = \underbrace{x}_{a}+\underbrace{y+z+3}_{b}+3 = x+y+z+6$ ‖

$(x*y)*z = (\underbrace{x+y+3}_{a})*\underbrace{z}_{b} = x+y+3+z+3 = x+y+z+6$

5. NEUTRALNI EL. $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \; e * x = x$?

$$-3 * x = -3 + x + 3 = x$$

$$e * x = x$$

$$e + \cancel{x} + 3 = \cancel{x}$$

$$\boxed{e = -3} \in \mathbb{R}$$

JE NEUTRALNI EL.

N.E.

6. INVERZNI EL. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, \; x' * x = -3$?

$$x' * x = -3$$

$$x' + x + 3 = -3$$

$$\boxed{x' = -6 - x} \in \mathbb{R}$$

ZA SVAKO x $\quad x' = -6 - x$ JE NJEGOV INVERZNI EL.

$$(-6 - x) * x = -6 - x + x + 3 = -3$$

7. IDEMPOTENTNOST : $\boxed{\underline{\forall x \in \mathbb{R}},\ x * x = x}$?

$$x * x = x + x + 3 = 2x + 3 \neq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$2x + 3 = x$

$2x - x = -3$

$x = -3$

ZA $x = -3$

$$\underline{(-3)} * \underline{(-3)} = -3 + (-3) + 3 = \underline{-3}$$

A ZA SVE OSTALE $x \in \mathbb{R}$

NEĆE BITI $x * x = x$

NE VAŽI

8. NILPOTENTNOST: $\boxed{\exists 0 \in R, \forall x \in R, \quad 0 * x = 0}$?

$0 * x = 0$

$\cancel{0} + x + 3 = \cancel{0}$

$x = -3$

NE VAŽI ZA SVE $x \in R$

JEDINO JE

$0 * (-3) = 0 + (-3) + 3 = 0$

9. KANCELACIJA: ako važi asocijativnost + neutralni + inverzni = kancelacija