1 Linearna funkcija

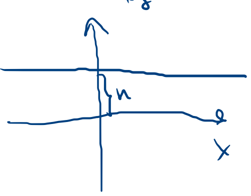
Linearna funkcija definisana na skupu $\mathbb{R}$ je funkcija $y = f(x)$ određena sa

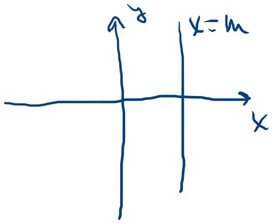
$$\boxed{y = kx + n,} \quad k, n \in \mathbb{R}.$$

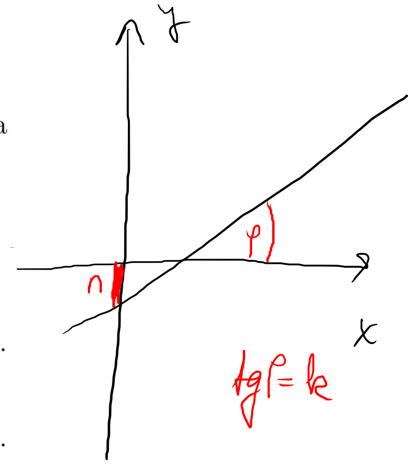
Za fiksirano k i n grafik linearne funkcije je prava.

Broj $k \in \mathbb{R}$ je koeficijent pravca prave.

$k=0$

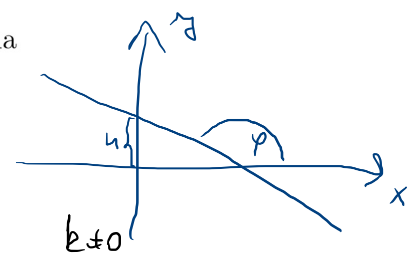






$tg\varphi = k$

- Ako je $k > 0$ prava sa pozitivnim delom $x-$ose gradi oštar ugao, tj. funkcija je rastuća.
- Ako je $k < 0$ prava sa pozitivnim delom $x-$ose gradi tup ugao, tj. funkcija je opadajuća.
- Ako je $k = 0$ prava je paralelna sa $x-$osom, tj. u pitanju je konstantna funkcija $f(x) = n$



Nula funkcije je rešenje linearne jednačine $y = 0$, tj.

$$kx + n = 0,$$

$y=0$

$kx+n=0$

$kx=-n$

$x=-\frac{n}{k}$, $k\neq 0$

pa ako je $k \neq 0$ tačka $\left(-\frac{n}{k}, 0\right)$ predstavlja presek prave i $x-$ose.

Presek grafika sa $y-$osom se dobija za $x = 0$, tj. to je tačka $(0, n)$.

Napomena 1 *Položaj prave je određen sa dve tačke.*

Tačka u $xy-$ravni ima dve koordinate $M(x_0, y_0)$ i x_0 je apscisa dok je y_0 ordinata.

$M_1(x_1, y_1)$

$M_2(x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \overbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}^{k}(x - x_1)$$

(P1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x-2$

$f(-2) = 3\cdot(-2)-2 = -8$

$f(0) = -2$

$f(5) = 3\cdot 5 - 2 = 13$

$f(a) = 3a-2$

$f(x^2) = 3x^2-2$

$f(\sin x) = 3\sin x - 2$

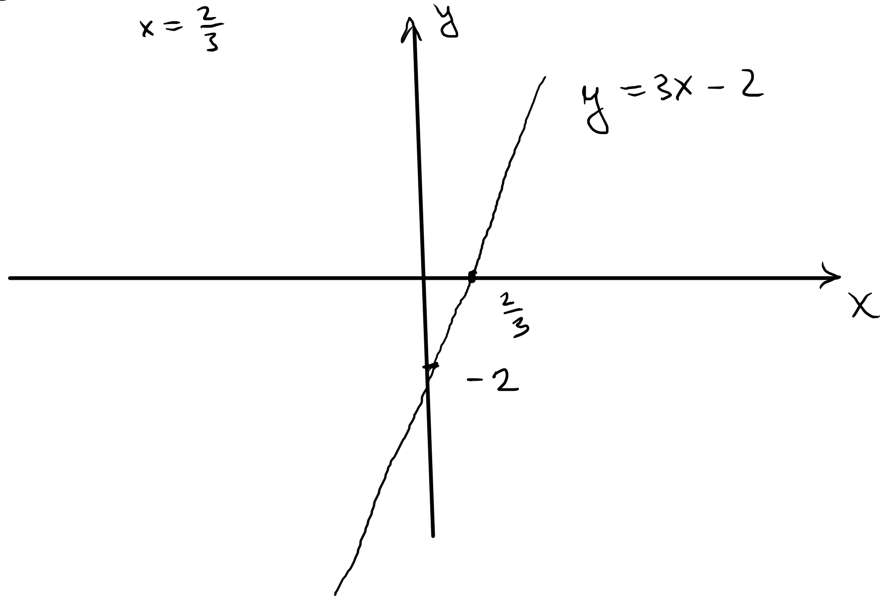
$f(3x+5) = 3(3x+5)-2$
$= 9x+13$

$f(f(0)) = f(-2) = -8$

$f(f(x)) = f(3x-2) = 3(3x-2)-2$
$= 9x-8$

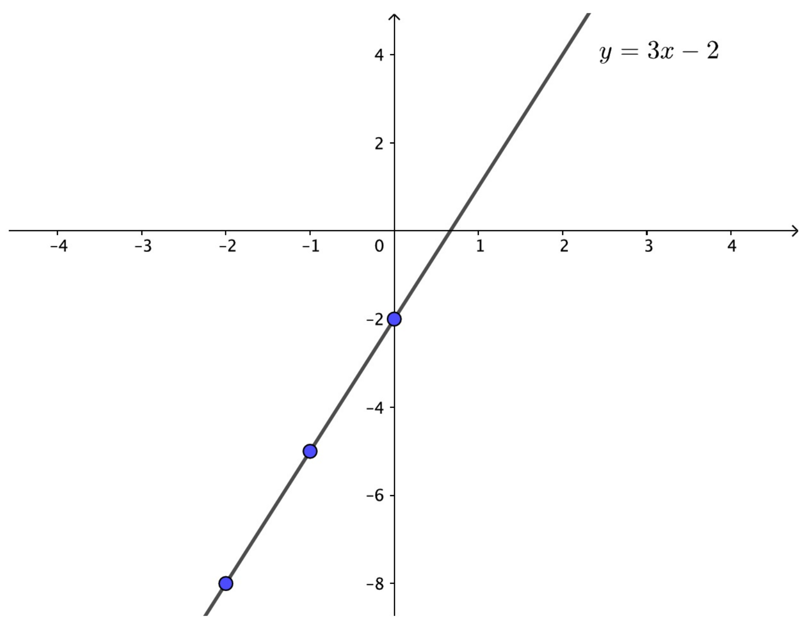
$x=0 \Rightarrow y=-2$

$y=0 \Rightarrow 3x-2=0$
$x=\frac{2}{3}$



Primer 1 *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dato sa* $f(x) = 3x - 2$*. Izračunati* $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(f(0))$, $f(-x)$, $f(f(x))$*. Nacrtati grafik funkcije.*

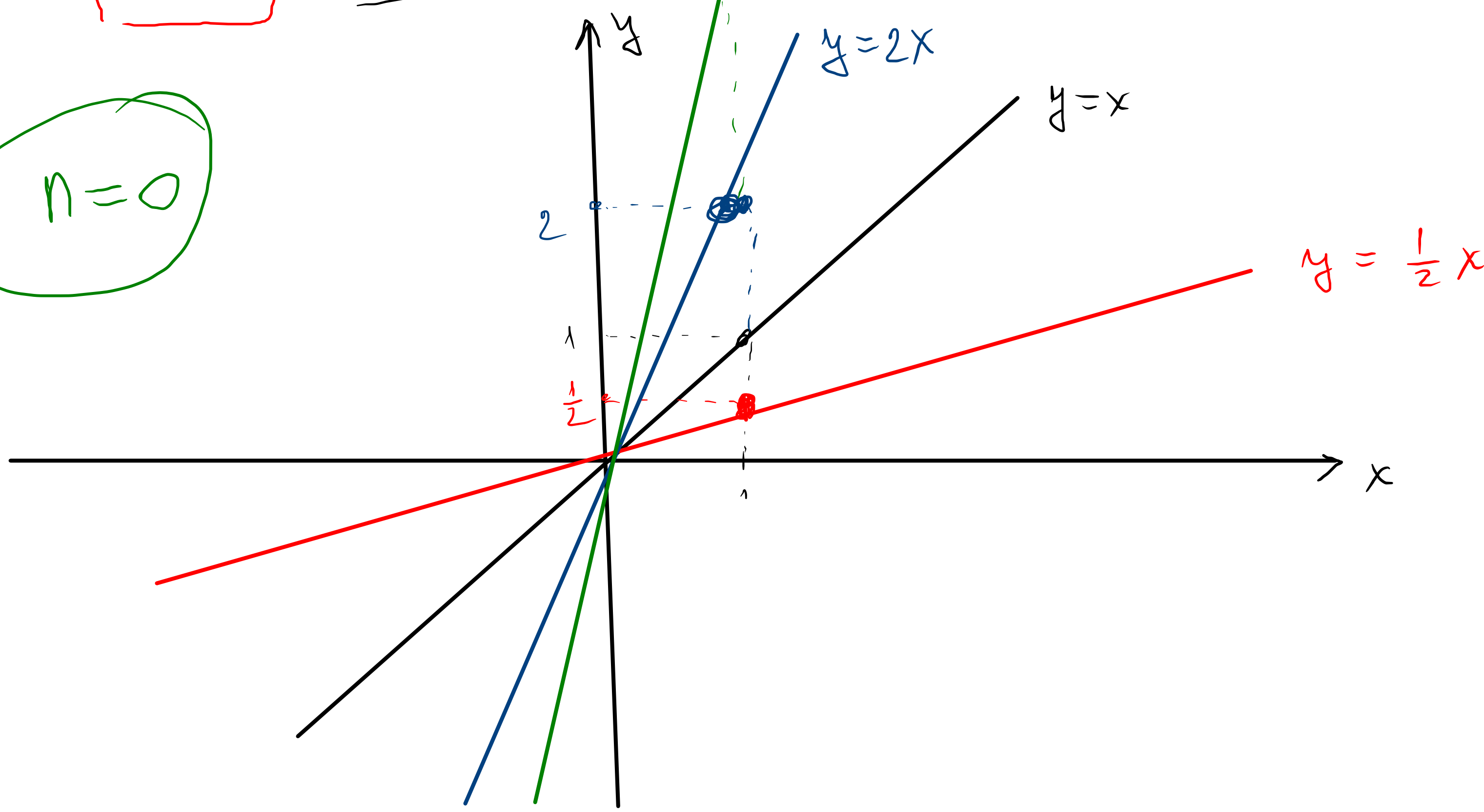
$$f(-2) = 3\cdot(-2)-2 = -6-2 = -8, \quad f(-1) = 3\cdot(-1)-2 = -3-2 = -5,$$
$$f(0) = -2, \quad f(f(0)) = f(-2) = -8, \quad f(-x) = 3(-x) - 2 = -3x - 2,$$
$$f(f(x)) = f(3x-2) = 3(3x-2) - 2 = 9x - 8.$$



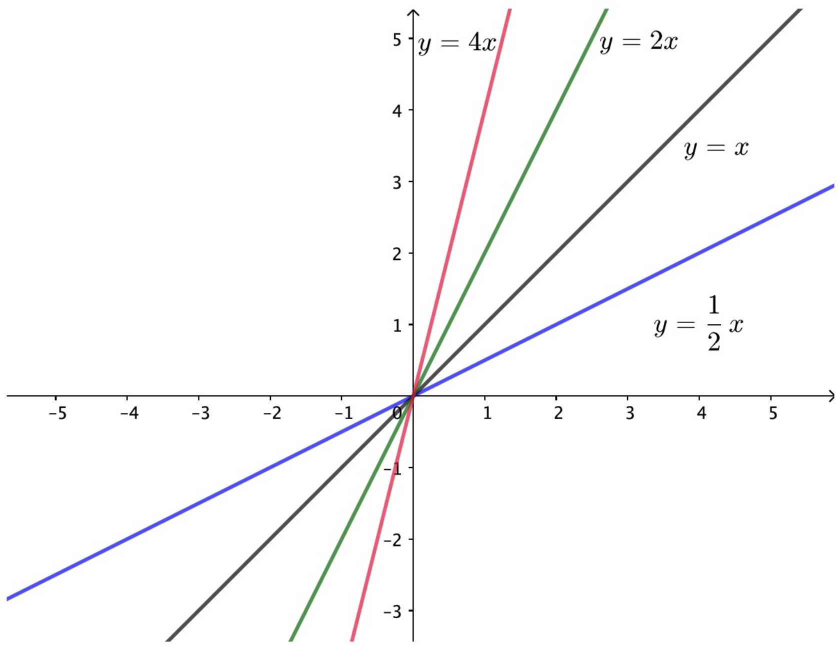
Slika 1: $f(x) = 3x - 2$

P2. $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$, $\boxed{y = x}$, $y = 2x$, $y = 4x$

$n = 0$



Primer 2 *U istom koordinatnom sistemu konstruisati grafike sledećih funkcija* $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = 2x$ *i* $y = 4x$.

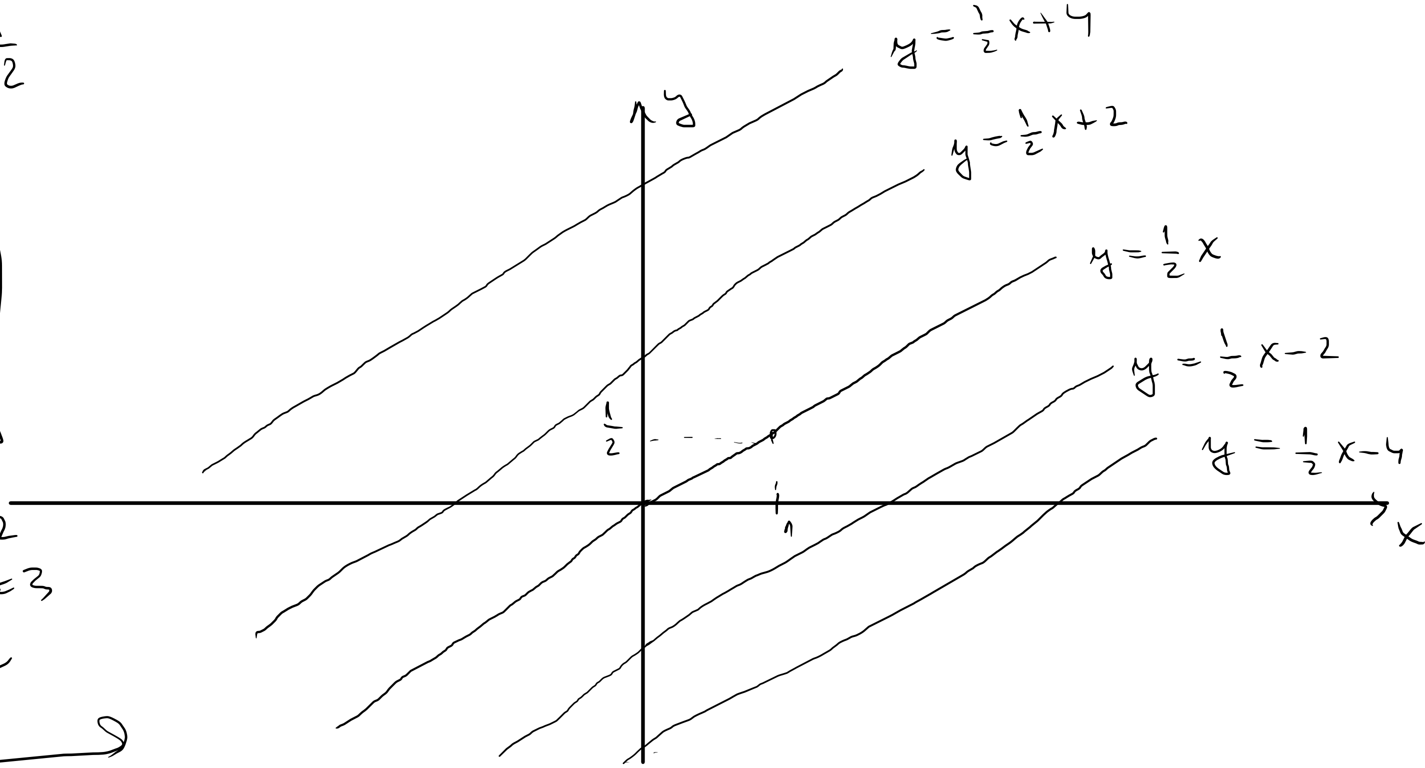


Slika 2: Primer 2

Ukoliko je koeficijent $n = 0$ prava prolazi kroz koordinatni početak. Na slici 2 vidi se položaj prave za razne vrednosti koeficijenta pravca

P3. $\boxed{y=\frac{1}{2}x}$, $y=\frac{1}{2}x+2$, $y=\frac{1}{2}x-2$, $y=\frac{1}{2}x+4$, $y=\frac{1}{2}x-4$

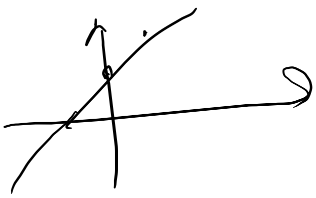
$k=\frac{1}{2}$



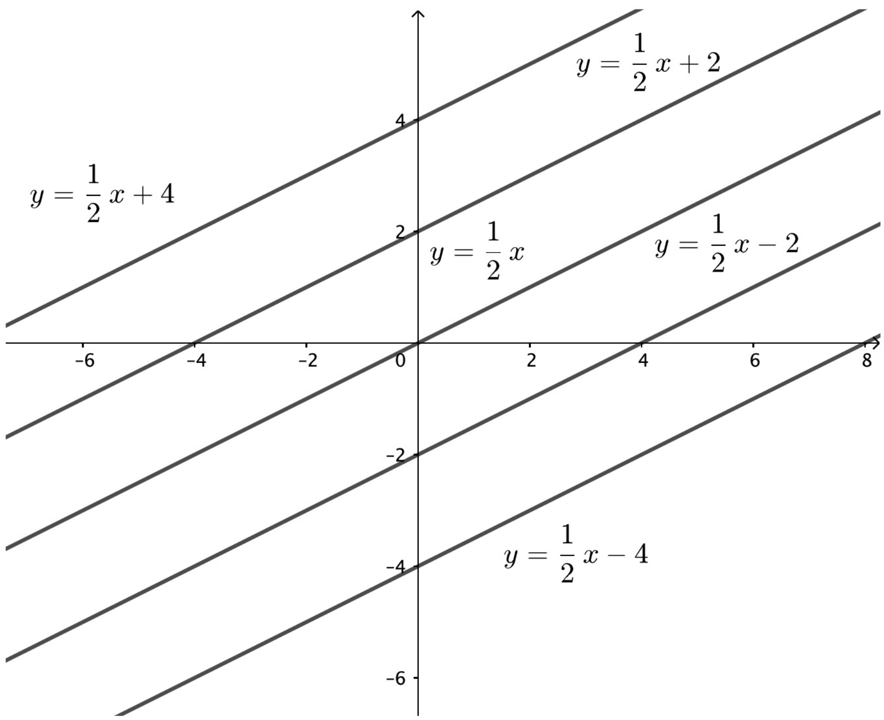
$\boxed{y=\frac{1}{2}x+2}$

$x=0 \quad y=2$

$x=2 \quad y=3$



Primer 3 *U istom koordinatnom sistemu konstruisati grafike sledećih funkcija* $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = \frac{1}{2}x - 2$, $y = \frac{1}{2}x + 4$, $y = \frac{1}{2}x - 4$, $y = \frac{1}{2}x + 1$ *i* $y = \frac{1}{2}x - 1$.



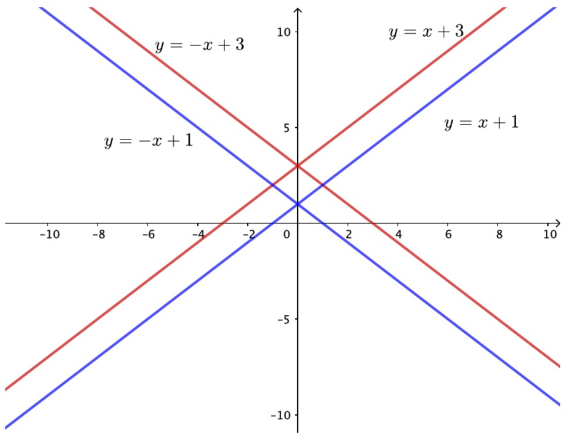
Slika 3: Primer 3

Sve prave imaju isti koeficijent pravca $k = \frac{1}{2}$ pa su paralelne. Na slici 3 se vidi uticaj koeficijenta n.

$p \perp q$

$$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$$

Primer 4 *U istom koordinatnom sistemu konstruisati grafike sledećih funkcija* $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = x + 3$ *i* $y = -x + 3$.



$n = 1$

$k \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

$n = 3$

$k_2 \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

Slika 4: Primer 4

Koeficijent pravca pravih $y = x+1$ i $y = x+3$ je $k_1 = 1$, dok je koeficijent pravca pravih $y = -x + 1$ i $y = -x + 3$ je $k_2 = -1$. Kako je

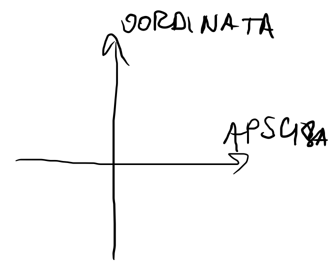
$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

uslov ortogonalnosti sledi da su prave međusobno ortogonalne, slika 4.

2 Linearna jednačina i nejednačina

Linearna jednačina je

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0.$$



Rešenje linearne jednačine je

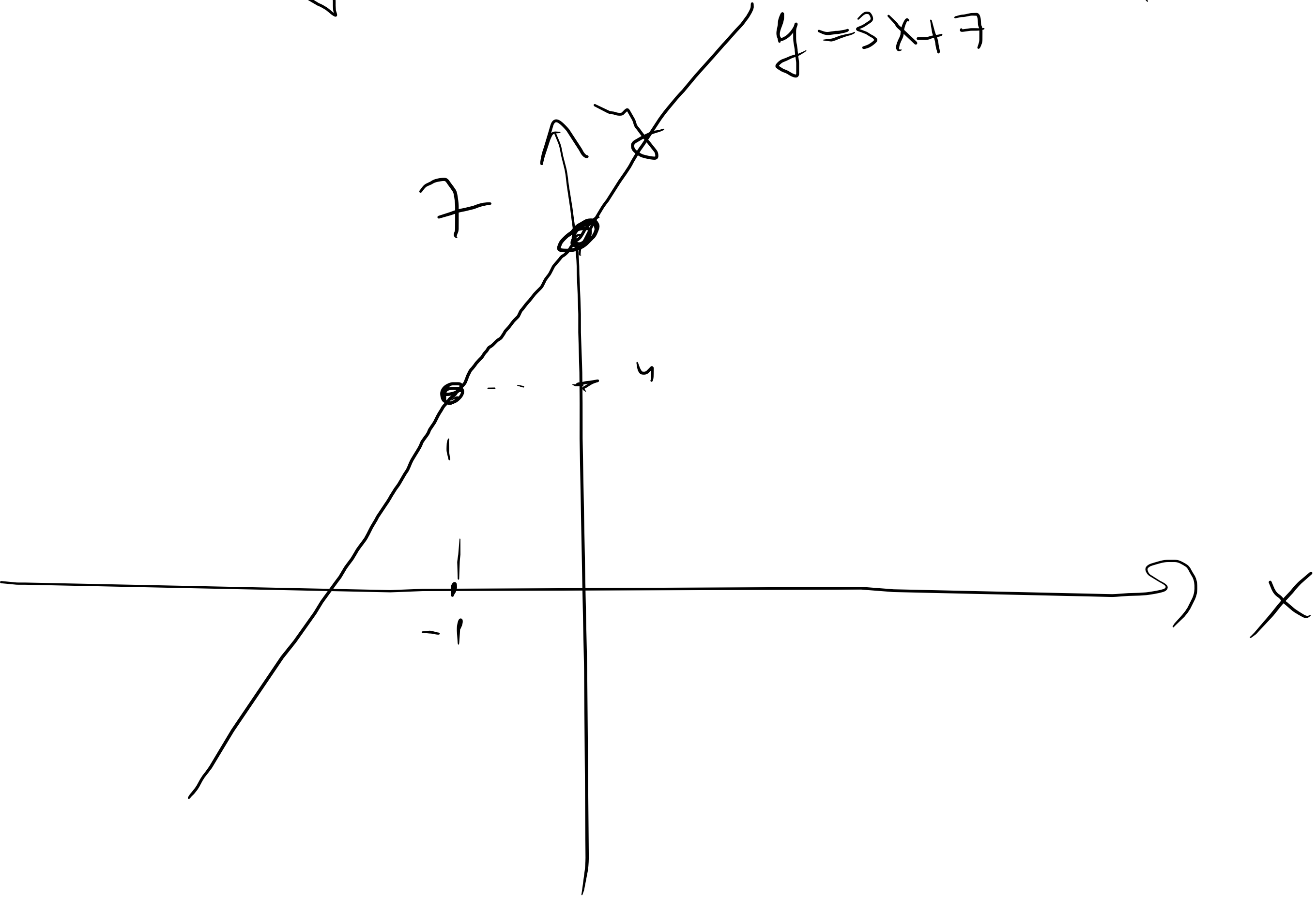
$$x = -\frac{b}{a}$$

i predstavlja apscisu presečne tačke grafika (prave) i $x-$ose, tj. tačka preseka je $T(-\frac{b}{a}, 0)$.

$y = 3x + 7$

$x = 0 \quad y = 7$

$x = -1 \quad y = 4$



Linearna nejednačina je

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0,$$

pri čemu umesto znaka $>$ može se nalaziti bilo koji od znakova $\geq, <, \leq$.
Prilikom pronalaženja rešenja razlikujemo sledeće slučajeve:

- Ako je $a > 0$ tada je

$$\begin{aligned} ax + b &> 0 \\ ax &> -b \\ x &> -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

$ax+b>0$

$ax>-b$

- Ako je $a < 0$ tada je

$$\begin{aligned} ax + b &> 0 \\ ax &> -b \\ x &< -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Postupak je isti u slučaju $\geq, <, \leq$.

Primer 5 *Rešiti sledeće jednačine i nejednačine.*

1. $2x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -7 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{2}$
2. $-3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$
3. $2x + 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > -4 \quad \Leftrightarrow \quad x > -2$
4. $-x + 8 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x > -8 \quad \Leftrightarrow \quad x < 8$
5. $2x - 8 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leq 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4$
6. $-3x + 9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \geq -9 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3$

Primer 6 *Rešiti jednačine.*

④ $$\frac{6x^2+9}{3x^2-x} - 2 = \frac{3}{x} - \frac{3}{3x-1}$$

uslove:

$3x^2-x \neq 0$, $\boxed{x \neq 0}$ ✓, $3x-1 \neq 0$

$x(3x-1) \neq 0$

$x \neq 0 \wedge 3x-1 \neq 0$

$\boxed{x \neq \frac{1}{3}}$ ✓

$$\frac{6x^2+9-2(3x^2-x)}{3x^2-x} = \frac{3(3x-1)-3x}{x(3x-1)}$$

$$\frac{9+2x}{3x^2-x} = \frac{6x-3}{x(3x-1)} \quad / \cdot (3x^2-x)$$

$$9+2x = 6x-3$$

$$4x = 12$$

$$\boxed{x = 3}$$

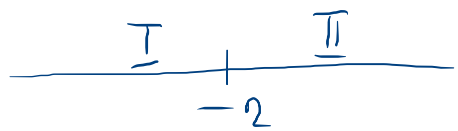
X

$$|x+2| - 3 = 2x - 6$$

$$|x+2| = 2x - 3$$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x+2 \geq 0 \\ -(x+2), & x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$$



I $\boxed{x < -2}$

$$-x - 2 = 2x - 3$$

$$-3x = -1$$

$$\cancel{\boxed{x = \frac{1}{3}} < -2}$$

II $\boxed{x \geq -2}$

$$x + 2 = 2x - 3$$

$$-x = -5$$

$$\boxed{x = 5} \geq -2$$

✓

4

$$\frac{x^2+|x-1|}{x-3} \le x$$

$$\frac{x^2+|x-1|}{x-3} - x \le 0$$

$$\frac{x^2+|x-1|-x(x-3)}{x-3} \le 0$$

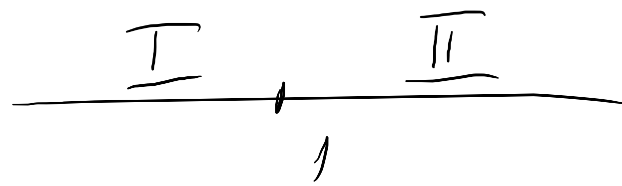
$$\frac{\cancel{x^2}+|x-1|-\cancel{x^2}+3x}{x-3} \le 0$$

$$\frac{|x-1|+3x}{x-3} \le 0$$

услов: $x-3 \ne 0$

$\boxed{x \ne 3}$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \ge 0 \\ -(x-1), & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \ge 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$$



I $\boxed{x < 1}$

$$\frac{-x+1+3x}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{2x+1}{x-3} \leq 0$$

	$-\frac{1}{2}$		3	
$2x+1$	$-$	0 $+$		$+$
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$
	$+$	$-$		$+$

$x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right)$

$\boxed{x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right)}$

II $x \geq 1$

$$\frac{x-1+3x}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{4x-1}{x-3} \leq 0$$

	$\frac{1}{4}$		3	
$4x-1$	$-$	0 $+$		$+$
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$
	$+$	$-$		$+$

$x \in \left[\frac{1}{4}, 3\right)$

$\boxed{x \in [1, 3)}$

Коначно

$x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right)$

1. $\dfrac{6x^2+9}{3x^2-x} - 2 = \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{3x-1}$

   Jednačina je definisana za $3x^2 - x = x(3x-1) \neq 0$, *tj. za* $x \neq 0$ *i* $x \neq \frac{1}{3}$ *pa rešenje tražimo na skupu* $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$. *Množenjem leve i desne strane jednakosti sa* $x(3x-1)$ *dobija se*

$$\begin{aligned} 6x^2+9-2x(3x-1) &= 3(3x-1)-3x \\ 6x^2+9-6x^2+2x &= 9x-3-3x \\ 2x+9 &= 6x-3 \\ -4x &= -12 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

2. $\dfrac{3x+2}{x-1} + \dfrac{2x+3}{1-x} = 0$

   Jednačina je definisana za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Množenjem leve i desne strane jendačine sa* $x-1$ *dobija se*

$$\begin{aligned} 3x+2+(-1)(2x+3) &= 0 \\ 3x+2-2x-3 &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

   Kako jednačina nije definisana za $x = 1$ *to ne može biti rešenje, tj. jednačina nema rešenje.*

3. $|x+2| - 3 = 2x - 6$

   Kako je $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x+2 \geq 0, \\ -(x+2), & x+2 < 0, \end{cases} = \begin{cases} x+2, & x \geq -2, \\ -x-2, & x < -2, \end{cases}$ *rešenje tražimo na dva različita inetrvala.*

   Ako je $x \geq -2$ *tada je*

$$\begin{aligned} x+2-3 &= 2x-6 \\ -x &= -5 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

   To jeste rešenje jer pripada intervalu nad kojim rešavamo jednačinu, tj. $5 \geq -2$.

Ako je $x < -2$ tada je

$$\begin{aligned} -x-2-3 &= 2x-6 \\ -3x &= -1 \\ x &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Kako $\frac{1}{3}$ ne pripada intervalu nad kojim rešavamo jednačinu jer nije $\frac{1}{3} < -2$ to ne može biti rešenje.

Primer 7 *Rešiti nejednačinu*

$$\frac{x-3}{x-1} > \frac{x-5}{x-3}.$$

Nejednačina je definisana na skupu $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x-1} - \frac{x-5}{x-3} &> 0 \\ \frac{(x-3)(x-3)-(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-3)} &> 0 \\ \frac{x^2-6x+9-x^2+6x-5}{(x-1)(x-3)} &> 0 \\ \frac{4}{(x-1)(x-3)} &> 0. \end{aligned}$$

Poslednja nejednakost će biti zadovoljena za $(x-1)(x-3) > 0$ što je zadovoljeno u dva slučaja.

Prvi slučaj je za $x - 1 > 0$ i $x > 3$ odakle se dobija interval $(3, +\infty)$.

Drugi slučaj je za $x - 1 < 0$ i $x < 3$ odakle se dobija interval $(-\infty, 1)$.

Prema tome rešenje nejednačine su svi brojevi $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

3 Sistemi linearnih jednačina

Sistem dve linearne jednačine nad skupom $\mathbb{R}$ je konjunkcija dve jednačine

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$