Sistemi linearnih jednačina

November 30, 2021

Sistem m **linearnih jednačina** sa n nepoznatih je

$$S: \quad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

gde je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uređena n-torka nepoznatih, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ su koeficijenti, a $b_i \in \mathbb{R}$ slobodni članovi, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ako je broj jednačina u sistemu jednak broju nepoznatih (tj. $m = n$) tada se sistem zove **kvadratni** sistem.

Ako su u sistemu svi slobodni članovi jednaki nuli (tj. ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$,) onda se sistem naziva **homogen** sistem.

Skup rešenja sistema S, u oznaci R_s, čine sve uređene n-torke brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ koje zadovoljavaju svaku jednačinu sistema.

$x+y=0$
$2x+5y=0$

$x+y-5=0$
$2x+5y+6=0$

$x+y=0$
$2x+y=0$

$x+y=3$
$2x+3y=5$

$y=-1, \; x=4$
$\boxed{(4,-1)}$

$x+y+z=5$
$2x-2y+4z=3$

$x+2=5$
$x=3$
$x^2-1=0$
$x=\pm 1$

U zavisnosti od broja rešenja sistema, tj. prirode sistema, sistem može biti:

SAGLASAN

1. ODREĐEN - ima tačno jedno rešenje;
2. NEODREĐEN - ima više od jednog rešenja;
3. NEMOGUĆ (kontradiktoran, protivrečan)- nema rešenja.

$$\begin{aligned} x+y&=0\\ 2x+2y&=0 \end{aligned}$$

$(0,0)$

$(1,-1)$

$(2,-2)$

$(-5,5)$

$\{(t,-t) \mid t\in\mathbb{R}\}$

Ako sistem ima bar jedno rešenje kaže se da je saglasan.

Homogen sistem sa $n \in \mathbb{N}$ promenljivih je uvek saglasan jer uvek ima bar jedno (trivijalno) rešenje $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.
Dakle, homogen sistem nikad nije nemoguć.

$$\begin{aligned} 2x+y&=0\\ 3x+2y&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y&=0\\ 2x+4y&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y&=3\\ x+y&=5 \end{aligned}$$

$\not\!\exists$

Primer:

a) $\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \end{array}$,

ovaj sistem je nemoguć, tj. nema rešenja. $R_S = \emptyset$.

b) $\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ & & x_2 & = & 3 \end{array}$,

$x_2 = 3$
$x_1 = 1$

ovaj sistem je određen. $R_S = \{\underline{(1,3)}\}$.

c) $\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \end{array}$,

ovaj sistem je neodređen, ima beskonačno mnogo rešenja.
$R_S = \{\underline{(t, 2-t)} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$(0,2)$, $(1,1)$, $(15,-13)$

Dva sistema jednačina su ekvivalentna ako i samo ako su im jednaki skupovi rešenja.

Primenom elementarnih transformacijama na sistem linearnih jednačina dobija se sistem ekvivalentan polaznom sistemu.

Elementarne transformacije sistema linearnih jednačina su:

- zamena mesta jednačinama;
- množenje jednačine skalarom različitim od nule;
- množenje jednačine skalarom i dodavanje nekoj drugoj jednačini;
- promena mesta sabircima u jednačinama (iste nepoznate pišu se jedna ispod druge odnosno u istoj koloni).

Postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina

Gausov postupak (Gausov algoritam, Gausova metoda eliminacije)

Može se primeniti za izračunavanje proizvoljnog sistema jednačina.
Sastoji se u tome da se pomoću navedenih elementarnih transformacija koje očuvavaju ekvivalentnost sistema, dobije trougaoni oblik iz kojeg se lako izračunavaju nepoznate.

Primer: Gausovim postupkom, rešiti sistem linearnih jednačina

a) $$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & -5 \end{array} \quad -3$$

Množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem drugoj jednačini dobija se

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & -5 \end{array} \; -3 \; \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ & - & 10y & = & -20 \end{array} .$$

$y = \frac{-20}{-10} = 2$

$x + 4 = 5$

$x = 1$

Iz druge jednačine sledi da je $y = 2$. Uvrštavanjem te vrednosti u prvu jednačinu dobija se $x = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s = \{(1,2)\}$.

(*)

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 5x - 3y &= 2 \end{aligned} \quad -5$$

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ -8y &= -33 \end{aligned}$$

$$y = \frac{33}{8}$$

$$x + \frac{33}{8} = 7$$

$$x = 7 - \frac{33}{8}$$

$$x = \frac{23}{8}$$

$$R_s = \left\{\left(\frac{23}{8}, \frac{33}{8}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} y + x &= 7 \\ -3y + 5x &= 2 \end{aligned} \quad 3$$

$$\begin{aligned} y + x &= 7 \\ 8x &= 23 \end{aligned}$$

$$x = \frac{23}{8}$$

$$y = 7 - \frac{23}{8}$$

$$y = \frac{33}{8}$$

$$R_s = \left\{\left(\frac{23}{8}, \frac{33}{8}\right)\right\}$$

$2x + 2y + 2z = 6$
$2x + 3y - 2z = 2$
$3x - y - \ = 1$

$$\text{b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array},$$

Množenjem prve jednačine sa -2 i dodavanjem drugoj jednačini, a potom množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem trećoj jednačini dobija se

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & - & \boxed{4y} & - & 3z & = & -17 \end{array}.$$

-2, -3, 4

Množenjem druge jednačine sa 4 i dodavanjem trećoj jednačini, dobija se

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & & & - & 19z & = & -57 \end{array}.$$

$R_s = \{(1,2,3)\}$

$z = \frac{-57}{-19} = 3$

$y - 4 \cdot 3 = -10$

$y = 2$

$x + 2 + 3 = 6$

$x = 1$

Dobijen je trougaoni oblik iz kojeg se iščitavaju rešenja. Iz treće jednačine sledi da je $z = 3$. Zamenom u drugu jednačinu dobija se $y = -10 + 4 \cdot 3 = 2$, a zamenom u prvu $x = 6 - 2 - 3 = 1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s = \{(1,2,3)\}$.

(1)

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1 \quad \cdot(-1)$$

$$x + y = 5$$
$$-2y = -4$$

$$y = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x + 2 = 5$$
$$x = 3$$

$$R_S = \{(3,2)\}$$

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$

$$2x = 6$$
$$x = 3$$

$$y = 2$$

$$y + x = 5$$
$$-y + x = 1 \quad +$$

$$y + x = 5$$
$$2x = 6$$

$$x = 3$$
$$y = 2$$

(2)

$$x + y = 2 \quad \Big) \cdot (-3)$$
$$3x + 3y = 11$$

$$x + y = 2$$
$$0 = 5$$

$R_S = \emptyset$

(3)

$$2x - 5y = 1 \quad \Big) \cdot (-2)$$
$$4x - 10y = 2$$

$$2x - 5y = 1$$
$$0 = 0$$

$$2x - 5y = 1$$

$$2x = 1 + 5y$$

1 x NEODREDEN

$\boxed{y = t}$, $t \in \mathbb{R}$

$$2x = 1 + 5t$$

$$\boxed{x = \frac{1 + 5t}{2}}$$

$$R_S = \left\{ \left(\frac{1+5t}{2}, t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

(4)

$$3x+4y-z=8$$
$$4x-y+5z=36$$
$$-x+2y-z=10$$

$$-x+2y-z=10$$
$$\boxed{3x}+4y-z=8$$
$$\boxed{4x}-y+5z=36$$

3

4

$$-x+2y-z=10$$
$$10y-4z=38$$
$$7y+z=76$$

$$-x-z+2y=10$$
$$-4z+10y=38$$
$$z+7y=76$$

$$-x-z+2y=10$$
$$z+7y=76$$
$$-4z+10y=38$$

4

$$-x-z+2y=10$$
$$z+7y=76$$
$$38y=342$$

$$y=\frac{342}{38}=\frac{171}{19}$$

$$z+7\cdot\frac{171}{19}=76$$

$$z=76-\frac{304}{19}$$

$$-x-\left(76-\frac{304}{19}\right)+2\cdot\frac{171}{19}=0$$

$$x=\ldots$$

$$76\cdot4$$
$$304$$
$$38$$
$$342$$

(5)

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 3x - 4y + 2z &= 0 \quad -3 \\ -x + 2y + 2z &= 1 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ -y - 4z &= -3 \\ y + 4z &= 2 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ -y - 4z &= -3 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

↯ $R_S = \emptyset$

6

$$-x - y - 3z = 1$$
$$4x + 4y + 12z = -4$$
$$3x + 3y + 9z = -3$$

$$-x - y - 3z = 1$$
$$0 = 0 \quad w$$
$$0 = 0 \quad w$$

$$-x - y - 3z = 1$$

$$-x = 1 + y + 3z$$

2 x neodreden

$$-x - y - 3z = 1$$
$$\cancel{x + y + 3z = -1}$$
$$\cancel{x + y + 3z = -1}$$

$y = t, \ t \in \mathbb{R}$
$z = m, \ m \in \mathbb{R}$
$-x = 1 + t + 3m$
$x = -1 - t - 3m$

$R_S = \{(-1 - t - 3m, t, m) \mid t, m \in \mathbb{R}\}$