Relacije

October 6, 2021

$A = \{a, b\}$

$B = \{1, 2\}$

$(2,1)$

(a,a)

(b,b)

$(1,1)$

$(2,2)$

(a,b,c)

(a,b,c,d)

Uređen par elemenata a i b, u oznaci (a, b) je $\boxed{(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\},}$ $(b,a)=\{\{b\},\{b,a\}\}$
gde je a prva komponenta, a b druga komponenta uređenog para.

Napomena: $(b, a) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ pa za $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$.
$\boxed{(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.}$

Dekartov proizvod skupova A i B je skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A, a druga komponenta iz skupa B, tj.
$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$
Na osnovu ovog primera može se zaključiti da Dekartov proizvod nije komutativan, tj. $A \times B \neq B \times A$, ~~za~~ $A \neq B$.

Dekartov kvadrat skupa A je $A^2 = A \times A = \{(a_1, a_2) \,|\, a_1, a_2 \in A\}$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$, $A=\{1,2,3\}$
$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

$$\left.\begin{array}{l} A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\} \\ B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\} \end{array}\right\} \Rightarrow A\times B \neq B\times A, \quad A\neq B$$

$A = \{a, b\}$ $A = \{a, b\}$

$A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

Binarna relacija je bilo koji podskup od $A \times B$, tj. $\rho \subseteq A \times B$.

Ako uređen par (x, y) pripada relaciji ρ kaže se da su x i y u relaciji ρ i piše se $(x, y) \in \rho$ ili $x\rho y$.

Binarna relacija skupa A**,** je bilo koji podskup od A^2, tj. $\rho \subseteq A^2$.

Kako je $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ to su $\emptyset$ i A^2 sigurno relacije skupa A, i one se nazivaju prazna i puna relacija.

$A = \{a, b\}$

$B = \{1, 2\}$

$A = \{a, b\}$

$A^2 = A \times A = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$

$\emptyset$, A^2

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}$

$\rho_1 = \{(a,2)\}$

$\rho_2 = \{(b,2), (a,1)\}$

$\rho_3 = \emptyset$

$\rho_4 = A \times B$

$\vdots$

$(x, y) \in \rho$

$x \rho y$

$\boxed{(1,2) \in \leq}$

$1 \leq 2$

$5 > 3$

$(5,3) \in >$

$S = \{5, 7, 9\}$, $S = \{5, 7, 9\}$

$S^2 = S \times S = \{(5,5), (5,7), (5,9), (7,5), (7,7), (7,9), (9,5), (9,7), (9,9)\}$

$\rho_1 = \{(5,5)\}$

$\rho_2 = \{(5,7), (5,9)\}$

$\rho_3 = \emptyset$

$\rho_4 = S^2$

$\rho_5 = \{(5,9), (7,9), (9,9)\}$

Relacije koje imaju konačno mnogo elemenata se mogu zadati na više načina. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $\rho \subseteq A^2$ tada se ρ može zadati na sledeće načine:

- nabrajanjem elemenata: $\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2)\}$
- pomoću drugih relacija: $\rho = \left\{(x, y) \in A^2 | x^2 + y \leq 6\right\}$
- tablično:

ρ	1	2	3
1	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\top$	$\top$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$

- grafički.

Relacije koje imaju beskonačno mnogo elemenata mogu se zadati pomoću drugih relacija ili se mogu opisati rečima govornog jezika.

*Primer *:* $A = \{1, 2, 3\}$

$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$

$\rho_2 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

$\rho_3 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

$\rho_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

$\rho = \{(x,y)\}$

$\rho^{-1} = \{(y,x)\}$

$a \leq b$

$b \geqslant a$

Inverzna relacija relacije ρ je $\rho^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \rho\}$

Primer: Inverzne relacije relacija iz Primera * su:

$\rho_1^{-1} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$

$\rho_2^{-1} = \{(2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_3^{-1} = \{(1,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_4^{-1} = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

$\rho_5^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,2)\}$

Osnovne osobine binarne relacije ρ skupa $A \neq \emptyset$:

- **refleksivnost (R)**: $(\forall x \in A)\, x\rho x$ $\qquad (\forall x \in A)\,(x,x) \in A$
- **simetričnost (S)**: $(\forall x, y \in A)\,(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$ $\qquad (\forall x,y \in A)\,(x,y) \in A \Rightarrow (y,x) \in A$
- **antisimetričnost (A)**: $(\forall x, y \in A)\,(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$ ili $(\forall x,y \in A)\,(x,y)\in\rho \wedge (y,x)\in\rho \Rightarrow x=y$
  $(\forall x, y \in A)\,((x\rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \rceil\,(y\rho x))$ $\qquad (\forall x,y \in A)\,(x,y)\in\rho \wedge x\neq y \Rightarrow (y,x)\notin\rho$
- **tranzitivnost (T)**: $(\forall x, y, z \in A)\,((x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z)$
  $(\forall x,y,z \in A)\,(x,y)\in\rho \wedge (y,z)\in\rho \Rightarrow (x,z)\in\rho$

$\Rightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$

RST
RELACIJA EKVIVALENCIJE

RAT
RELACIJA PORETKA

$A=\{1,2,3\}$

$\rho_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(3,1)\}$ $\quad$ R $\quad \cancel{S} \quad \cancel{A} \quad \cancel{T}$ $\qquad (3,1)\in\rho_1 \wedge (1,2)\in\rho_1$, $(3,2)\notin\rho_1$

$\rho_2=\{(1,1),(2,2),(3,1),(1,3)\}$ $\quad \cancel{R} \quad$ S $\quad \cancel{A} \quad \cancel{T}$

$B=\{1,2\}$ $\qquad \rho_3=\{(1,1),(2,2)\}$ $\quad \cancel{R} \quad$ S $\quad$ A $\quad$ T

$\rho_4=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ $\quad$ R $\quad$ S $\quad$ A $\quad$ T

Primer: Ispitati osobine relacija iz Primera *.

$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$, $\boxed{A = \{1,2,3\}}$

$(2,1) \in \rho_1 \wedge (1,2) \in \rho_1$

$\Rightarrow (2,2) \in \rho_1$

R S ~~A~~ T

$$\rho_2 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}, \ A = \{1,2,3\}$$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ $\cancel{A}$ T

$\rho_3 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$, $A = \{1,2,3\}$

~~R~~ ~~S~~ ~~A~~ ~~T~~

$$\underbrace{\underbrace{(3,2)\in\rho_3 \wedge \underbrace{(2,?)\in\rho_3}_{\perp}}_{\perp} \Rightarrow}_{\top}$$

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, $A = \{1,2,3\}$

$\cancel{R}$ $\quad$ $\cancel{S}$ $\quad$ A $\quad$ T

$\rho_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}, \; A = \{1,2,3\}$

$\cancel{R}$ $\cancel{S}$ A T