Logika i skupovi

October 6, 2021

LOGIKA

Iskazi su rečenice za koje se zna da li su tačne ($\top$) ili netačne ($\bot$). Obeležavaju se malim latiničnim slovima: p, q, r, ... koja se nazivaju iskazna slova.

Definicije osnovnih logičkih operacija:

$\veebar$

Negacija

$\neg$	
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Konjukcija

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Disjunkcija

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

Implikacija

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

Ekvivalencija

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

$\boxed{\top, p, q}$

Rekurzivna definicija iskazne formule:

1. Iskazne konstante $(\top, \bot)$ i iskaznaa slova su iskazne formule.
2. Ako su A i B iskazne formule, tada su i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ i $\rceil A$ iskazne formule.
3. Iskazne formule se mogu dobiti samo konačnom primenom 1. i 2.

$A: \neg p \wedge q$

$B: q \vee p$

$(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

$\cancel{\neg p \vee}$

Uobičajeno je da se spoljašnje zagrade ne pišu. Kao i da se uzima da su operacije $\wedge$ i $\vee$ prioritetnije.
Iskazne formule koje su tačne za sve vrednosti iskaznih slova nazivaju se **tautologije**.

Primeri tautologija: $p, q, r \in \{\top, \bot\}$

$2 + 3 \cdot (1+2) = 2 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11$

$2+3 = 3+2$

- <u>komutativnost</u> konjukcije i disjunkcije:
  $$p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p$$
  $$p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p$$

$2 + (3+5) = (2+3) + 5$

- <u>asocijativnost</u> konjukcije i disjunkcije:
  $$p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$$
  $$p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$$

p	q	p ∧ q	q ∧ p	F
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤

$4 : 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$

- distributivnost konjukcije prema disjunkciji i disjunkcije prema konjukciji:

$$p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- zakon isključenja trećeg: $p \wedge \rceil p \quad \Leftrightarrow \quad \perp$; $p \vee \rceil p \quad \Leftrightarrow \quad \top$

- zakon kontrapozicije: $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$

- De Morganovi zakoni: $\rceil (p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \rceil p \vee \rceil q$; $\rceil (p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \rceil p \wedge \rceil q$

- zakon uklanjanja dvojne negacije: $\rceil\rceil p \quad \Leftrightarrow \quad p$

- $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad \rceil p \vee q$

$2 \cdot (3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$

$\rceil (f(x_1) = f(x_2))$

$\rceil (x_1 = x_2)$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$-(2+3) = -2-3$

$\rceil : p \to \rceil p$

$q \to \rceil q$

$\wedge \to \vee$

$\vee \to \wedge$

Za iskazivanje tvrđenja osim logičkih operacija, potrebni su i **logički kvantifikatori** $\forall$ (za svako) i $\exists$ (postoji).

- $(\forall x)\, \alpha(x)$: "za svako x tačno je $\alpha(x)$"
- $(\exists x)\, \alpha(x)$: "postoji x tako da važi $\alpha(x)$"

$\forall$ $\exists$

$(\forall x \in N)$ $x > 0$

$(\exists x \in N)$ $x < 3$

1, 2

Primer:

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \right)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})\, (x + 2 = 5)$

$\exists x \in \mathbb{R}, \; x^2 - 1 = 0$

1, -1

$\exists !$

Ako ispred x nije napisan nijedan kvantifikator tada se podrazumeva da stoji $\forall$.
Takođe se u svim definicijama podrazumeva ako i samo ako što će skraćeno biti zapisivano sa akko.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$\forall$

akko

$\Longleftrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

$p \Longleftrightarrow q$

$p \Rightarrow q$

$q \Leftarrow p$

SR IN BI

$x \in SR$

$x \notin SR \iff \neg(x \in SR)$

SKUPOVI

Skup je osnovni pojam koji se ne definiše.
Skupovi se obeležavaju sa A, B, C, ..., a elementi skupa sa a, b, c, ...

Činjenica da je x elemenat skupa S obeležava se sa: $x \in S$ i čita x pripada skupu S, a činjenica da x nije elemenat skupa S obeležava se sa: $x \notin S$ i čita x ne pripada skupu S.

$S = \{x \mid \pi(x)\}$

Konačan skup se može definisati nabrajanjem elemenata.

Primer: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ili $B = \{a, b\}$ ili $C = \{\bullet, \circ, ◐, ◑\}$.

Ako je skup S beskonačan, tada se mora pronaći neka osobina π koju imaju elementi skupa S, a koju nema nijedan element koji ne pripada skupu S. Neka $\pi(x)$ znači da x zadovoljava uslov π tada se skup S zapisuje sa $S = \{x | \pi(x)\}$. Ovaj način zapisivanja skupova se može koristiti i za konačne skupove.

RA

$\boxed{\emptyset}$

$\{\ \}$

Primer: $A = \{x | x < 5 \land x \in \mathbb{N}\}$ ili $S = \{x | 2x - 3 = 0\}$.

$A = \{4, 3, 2, 1\}$ $\qquad$ $S = \{\frac{3}{2}\}$ $\qquad$ $\{\emptyset\}$

Skup koji nema elemenata zove se **prazan skup** i obeležava se sa $\emptyset$ ili $\{\}$.
Napomena: $\{\emptyset\}$ - nije prazan skup već skup koji sadrži jedan elemenat (prazan skup).

Skup kome pripadaju svi elementi svih skupova koje posmatramo zove se **univerzalni skup** i obeležava sa $\mathcal{U}$.

$\{1, \cancel{1, 1}, 1\} = \underline{\underline{\{1\}}}$

Redosled elemenata u skupu nije važan, tj. $\{a, b\} = \{b, a\}$.
U skupu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata podrazumeva se da su svi elementi tog skupa međusobno različiti.

Kardinalni broj skupa A, je broj elemenata koji pripadaju skupu A, i obeležava se sa $Card\,(A)$.

$\#A$

Primer: $A = \{0, 1\} \Rightarrow Card\,(A) = 2$

$|A|$

Skupovne relacije i operacije se definišu preko odgovarajućih logičkih operacija:

- **jednakost** skupova: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

- skupovna **inkluzija** (podskup):
  $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

  pravi podskup: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

  Za svaki skup A važi: $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$.

$\Rightarrow$	T	⊥
T	T	⊥
⊥	T	T

$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$

- **unija** skupova: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- **presek** skupova: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

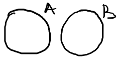
  Skupovi su disjunktni ako je njihov presek prazan skup, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.

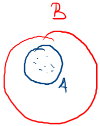
$A = \{1, 2, 3\}$

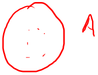
$B = \{a, b\}$

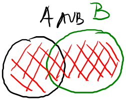
$A \cup B = \{1, 2, 3, a, b\}$

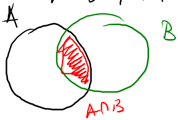
- **komplement** skupa: $\overline{A} = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$
- **razlika** skupova: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- **simetrična razlika** skupova:
  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

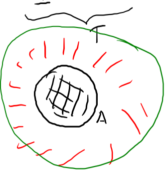


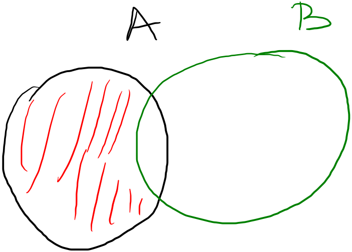




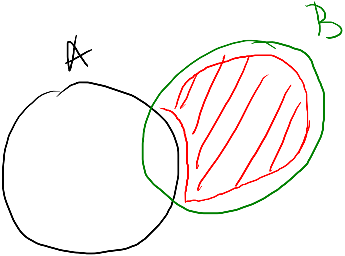




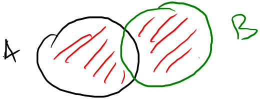




$A \setminus B$



$B \setminus A$



$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Osobine skupovnih operacija:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad A \cap \mathcal{U} = A$ $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\quad \overline{\overline{A}} = A$
  $A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $\quad A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$

- zakon komutativnosti: $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$

- zakon asocijativnosti: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

- zakon distributivnosti: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- zakon idempotentnosti: $A \cap A = A$
  $A \cup A = A$

- zakon apsorpcije: $A \cap (A \cup B) = A$
  $A \cup (A \cap B) = A$

- De Morganovi zakoni: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q}$

$\Leftrightarrow p \wedge q$

$\Leftrightarrow q \wedge p$

$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$

$\Leftrightarrow x \in B \cap A$

Partitivni skup, skupa A, je skup svih podskupova skupa A, tj.
$\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$.

$\emptyset \subseteq A$

Napomena: $\emptyset$ i A su uvek elementi skupa $\mathcal{P}(A)$.

$A \subseteq A$

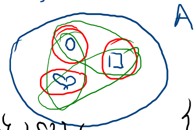
Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

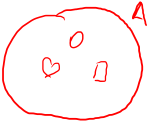
Particija skupa A, je skup nepraznih podskupova skupa A, od kojih su svaka dva disjunktna, a njihova unija je skup A.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
Sve particije skupa A su $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}\}$.

$\mathcal{P}(A) = \{\{○\}, \{□\}, \{♡\}, \{○, □\}, \{○, ♡\}, \{□, ♡\}, A, \cancel{\emptyset}\}$

$A = \{○, □, ♡\}$





PARTICIJA $\{\{○\}, \{□\}, \{♡\}\}$, $\{\{○\}, \{□, ♡\}\}$

$A = \{a, b\}$

$\mathcal{P}(A) = \{ \cancel{\emptyset}, \{a\}, \{b\}, A \}$

PARTIȚIE: $\{\{a\}, \{b\}\}$

$\{A\}$

Primer: Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{2, 4, 6\}$. Odrediti: $|A|$, $|B|$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(B)$ i sve particije skupa B.

$\# A = |A| = \mathrm{Card}(A) = 5$

$\# B = |B| = \mathrm{Card}(B) = 3$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

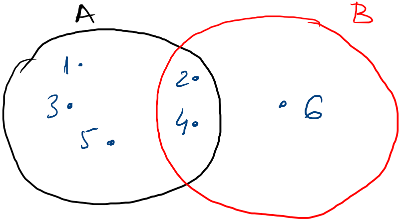
$A \cap B = \{2, 4\}$

$A \setminus B = \{1, 3, 5\}$

$B \setminus A = \{6\}$

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, B, \{2,4\}, \{4,6\}, \{2,6\}\}$

PARTICIJE: $\{\{\{2\}, \{4\}, \{6\}\}; \{\{2,6\}, \{4\}\}, \{\{4,6\}, \{2\}\}, \{\{2,4\}, \{6\}\}, \{B\}\}$



$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{I} = \{$ BROJEVI KOJI SE NE MOGU NAPISAT U OBLIKU $\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\} = \{\sqrt{2}, \pi, e, \dots\}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$