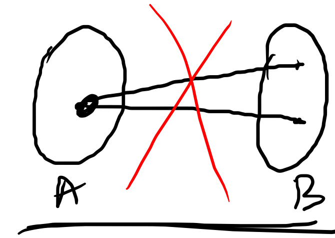
Funkcije

definicija, svojstva, kompozicija funkcija, inverzna funkcija,...

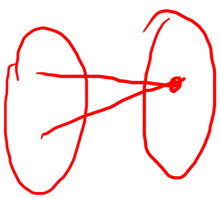
Definicija

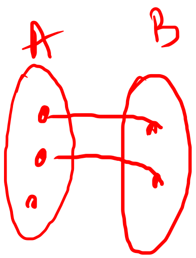


- Neka su *A* i *B* dva neprazna skupa. Ako je **svakom** elementu skupa *A* pridružen **samo jedan** element skupa *B*, onda kažemo da je zadata **funkcija** iz skupa *A* **u** skup *B*.

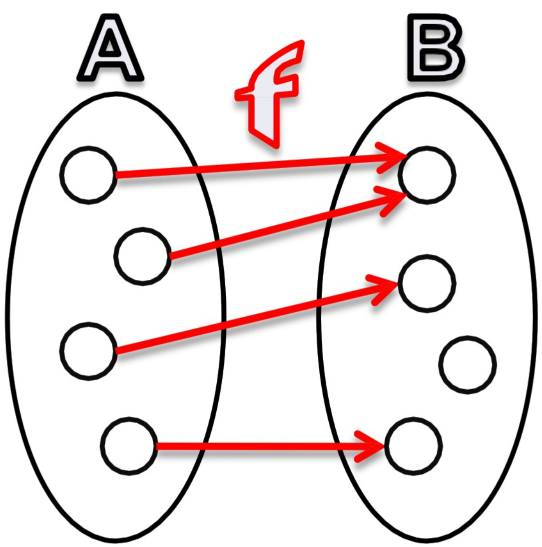
- Pišemo: $f : A \rightarrow B,$

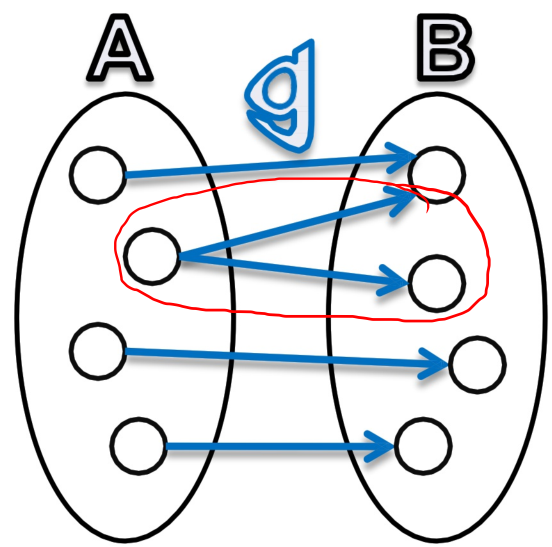
$$f(a) = b, \qquad a \in A, \qquad b \in B$$





NIJE FUNKCIJA SKUPA A U SKUP B





Nazivi

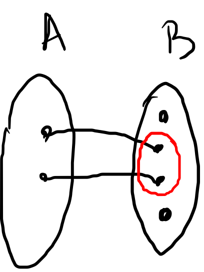
$f(x)$

- Kaže se da je *f(x)* vrednost funkcije *f* u tački *x*

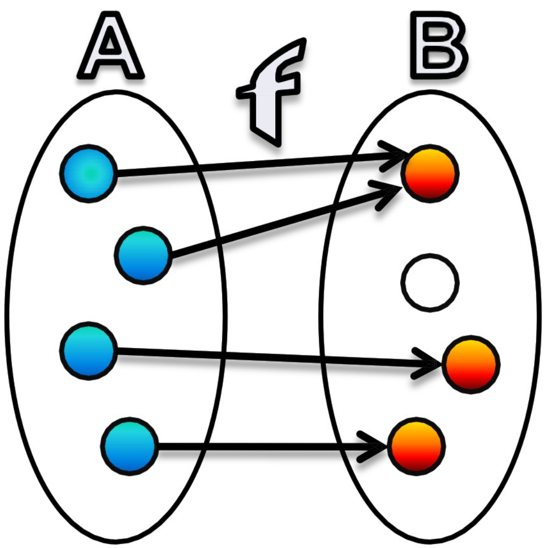
x	f(x)
original od f(x)	slika od x
nezavisna promenljiva	zavisna promenljiva
argument funkcije	vrednost funkcije u x

skup A	skup B
oblast definisanosti	skup vrednosti
domen	kodomen
D(f)	***K***(f)

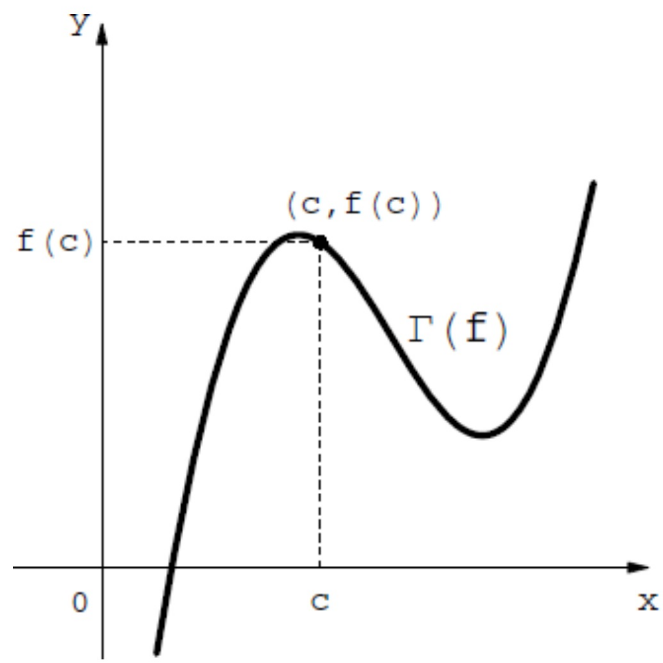
Skup slika i grafik funkcije



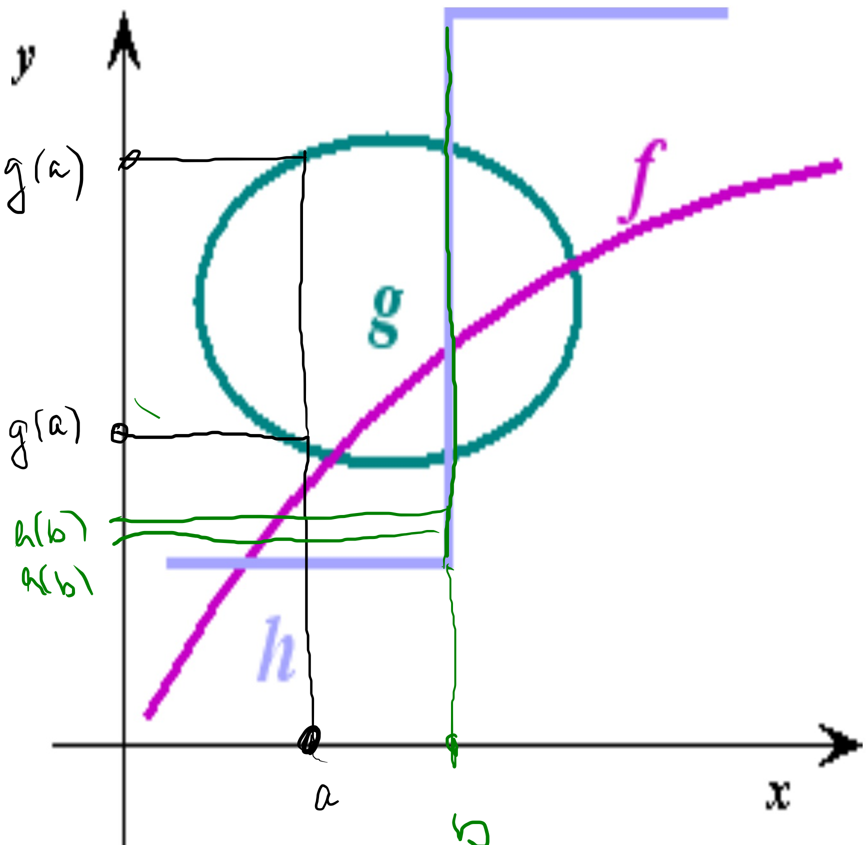
- Slika funkcije f je skup
  $R(\mathrm{f}) = \{f(x) \in B : x \in A\}$
  $R(\mathrm{f}) = \mathrm{f}(A)$

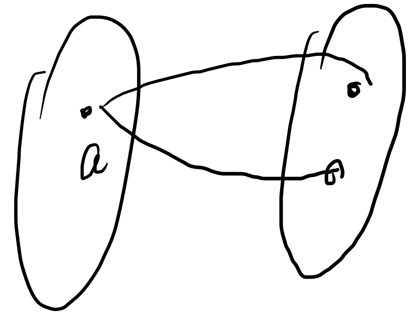


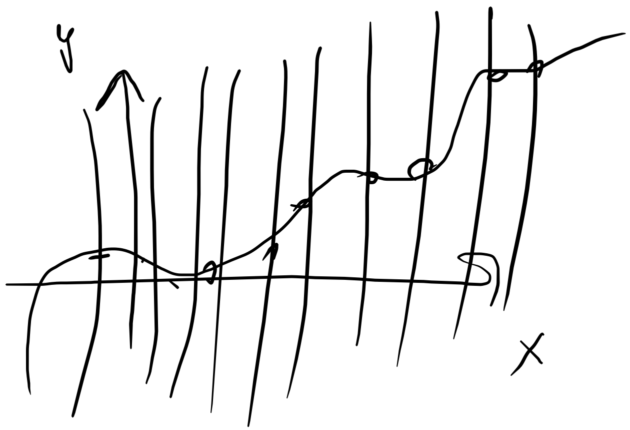
- Grafik funkcije f je skup
  $\Gamma(\mathrm{f}) = \{(x, f(x)) : x \in D(\mathrm{f})\}$
  $\Gamma(\mathrm{f}) \subseteq A \mathrm{x} B$

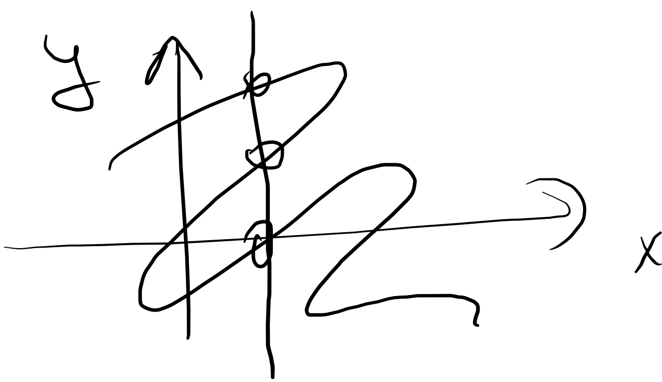


Koji od nacrtanih grafova predstavlja funkciju ?

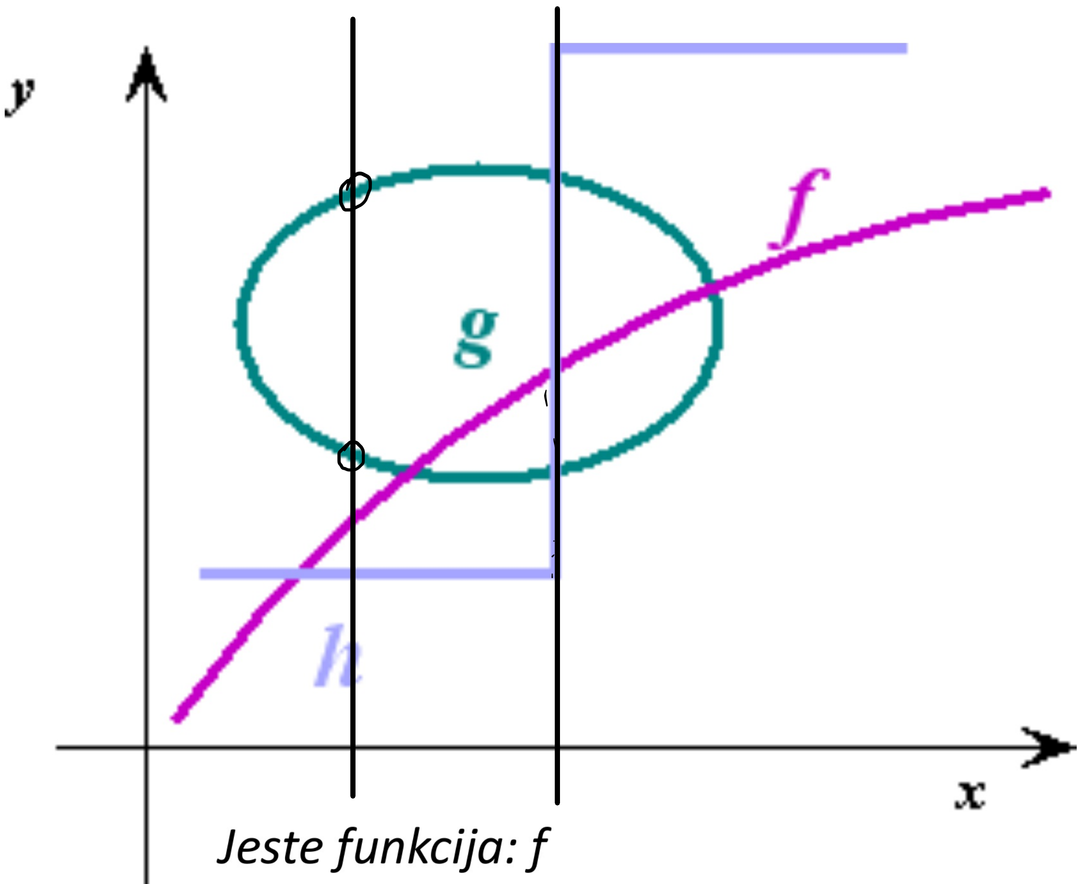






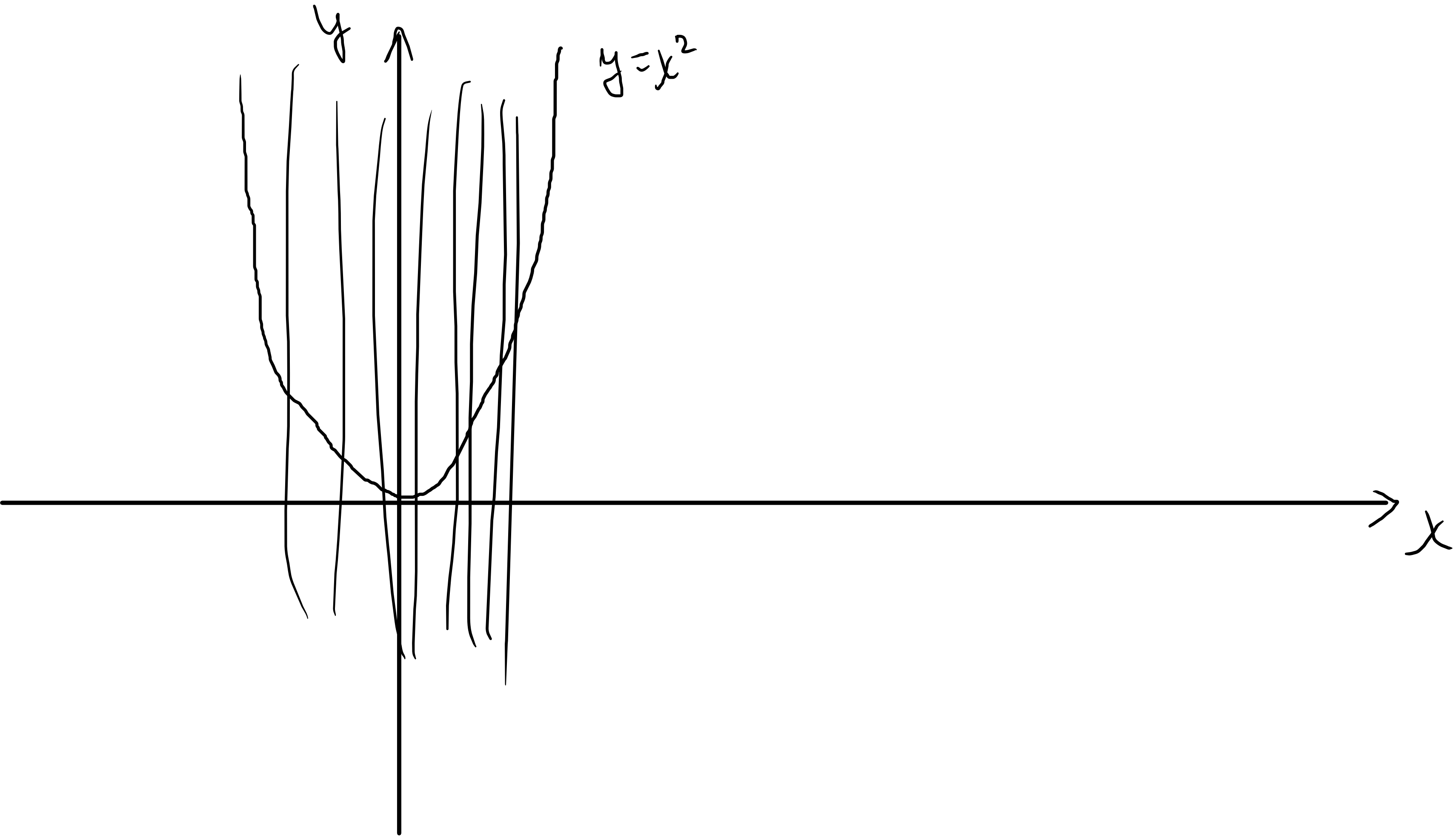


Koji od nacrtanih grafova predstavlja funkciju ?



Svaka prava paralelna sa y-osom mora seći grafik funkcije najviše u jednoj tački.

Jeste funkcija: f
Nisu funkcije: g i h



y
$y = x^2$
x

Realne funkcije realne promenljive

$f: A \to B$

$A \subseteq \mathbb{R}$

$B \subseteq \mathbb{R}$

- Za funkciju f kažemo da je **funkcija realne promenljive** ako je njen domen podskup skupa realnih brojeva, $D(f) \subseteq R$.

$f(x) = x^2$

$\boxed{D = \mathbb{R}}$

$D_1 = (1, 5)$

$D_2 = [-3, 2)$

- Za funkciju f kažemo da je **realna** ako je njen kodomen podskup realnih brojeva, $K(f) \subseteq R$.

- **Prirodna oblast definisanosti** (**prirodni domen**) za realne funkcije realne promenljive zadate formulom sastoji se od svih brojeva za koje je izraz definisan.

Jednakost funkcija

- Neka su date funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$. Kažemo da je funkcija *f* **jednaka** funkciji *g* i pišemo *f* = *g* ako je:

  1. A = C;
  2. B = D;
  3. $(\forall x \in A)\ (f(x) = g(x))$ tj. f i g imaju sve vrednosti jednake.

❖ Da li su funkcije g(x)=x/x i f(x)= 1 jednake?

$g(x) = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$ $\quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = 1$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

NISU JEDNAKI DOMENI PA NISU JEDNAKE FUNKCIJE

Zadaci

1. Odrediti prirodni domen funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

b) $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{(x^2+1)(x+2)(x-3)}$

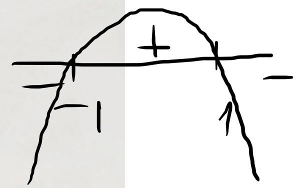
a) $1-x^2 \geq 0$

$(1-x)(1+x) \geq 0$

$1-x^2=0$

$x=\pm 1$

	-1		1	
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x^2$	$-$	$+$		$-$



$x \in [-1,1]$

$D=[-1,1]$

b) $x \neq 0$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

$D=\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$

$D=(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$

Zadatak

2. Da li su jednake funkcije f i g, definisane na prirodnom domenu:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ NE

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} - 3$, $g(x) = x-2$ NE

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$D_g = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{2x+1}$, $g(x) = \sqrt{2x^2-x-1}$

c) $x - 1 \geq 0$

$2x + 1 \geq 0$

$x \geq 1$

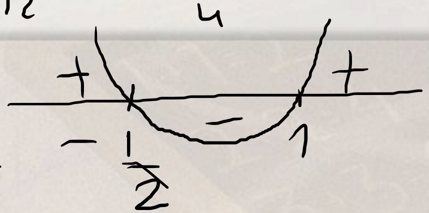
$x \geq -\frac{1}{2}$

$x \in [1, \infty)$

$\boxed{D_f = [1, \infty)}$

$2x^2 - x - 1 \geq 0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$ $\begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$



$D_g = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

NE

Algebra funkcija

$(\ln + \sin)(x) = \ln x + \sin x$

- Neka su date funkcije f, g: ***D*** → $\Re$.

  Definišemo f+g, f-g, cf, fg, f/g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(cf)(x) = c \cdot f(x), \qquad c \in \mathbf{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$g(x) \neq 0$

- Domen funkcija f+g, f-g, cf, fg je ***D***, a domen funkcije f/g je podskup od ***D***, odnosno skup

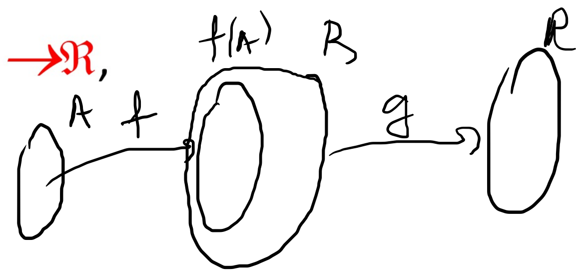
$$\{x \in \boldsymbol{D} : g(x) \neq 0\}$$

Kompozicija funkcija

$f : A \to B$

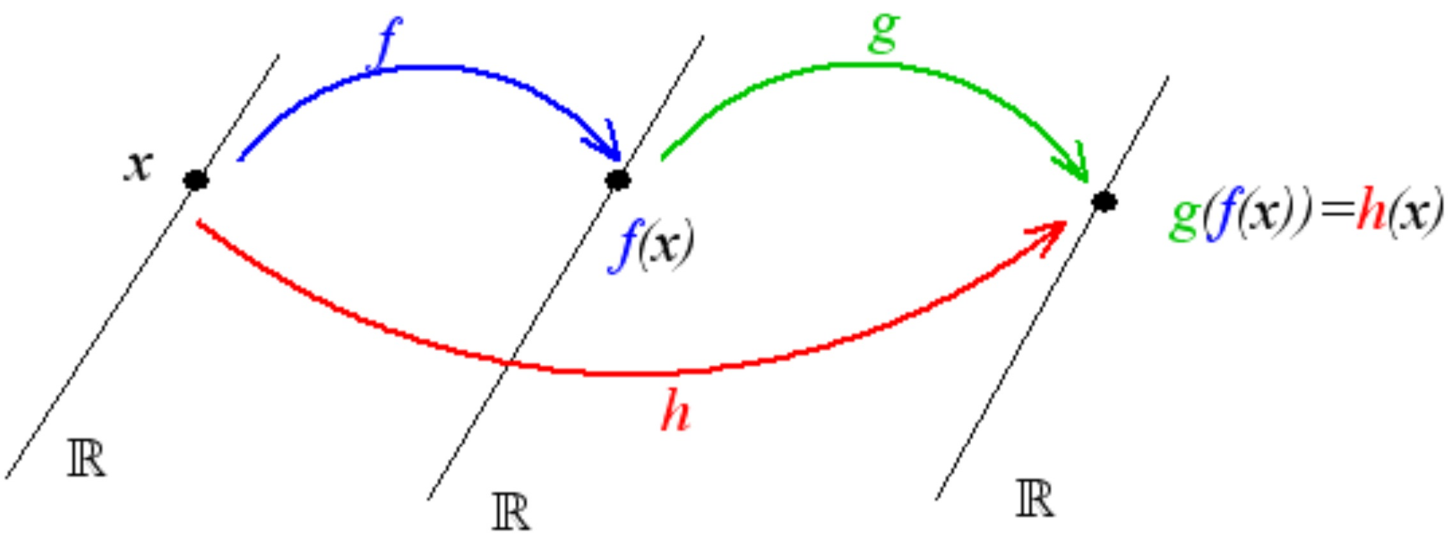
$g : B \to C$

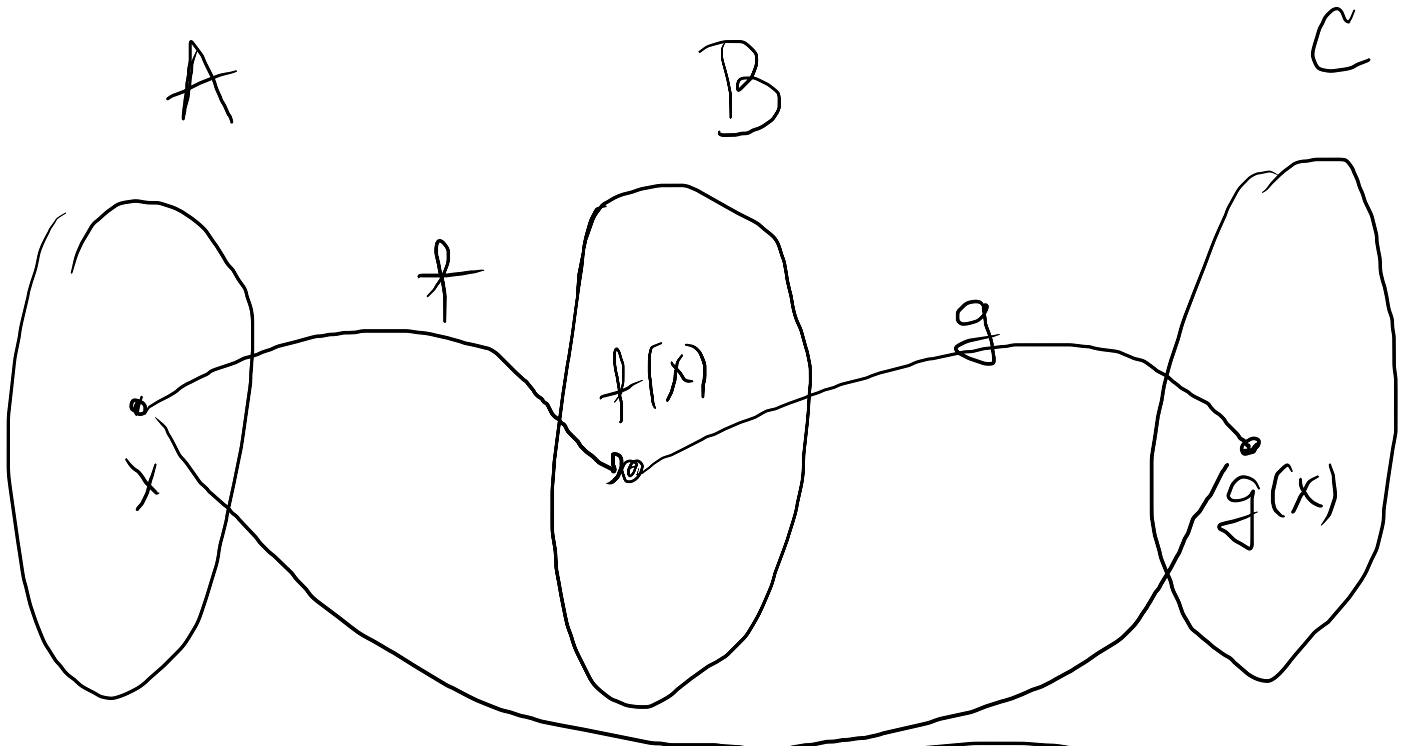
- Neka su $f\!:A \to \mathfrak{R}$ *i* $g\!:B \to \mathfrak{R}$ i važi $A, B \subseteq \mathfrak{R}$.
- Ako je $\boldsymbol{f(A) \subseteq B}$ tada možemo definisati funkciju $h\!:A \to \mathfrak{R}$, odnosno kompoziciju funkcija f i g



$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- •





$$\boxed{h = g \circ f}$$

$\ln(\sin x)$

$\sin(x^2+1)$

Zadaci

3. Odrediti fog i gof ako su:
   a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$
   b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3$

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin(x)) = (\sin(x))^2 = \sin^2(x)$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt{x^3}$

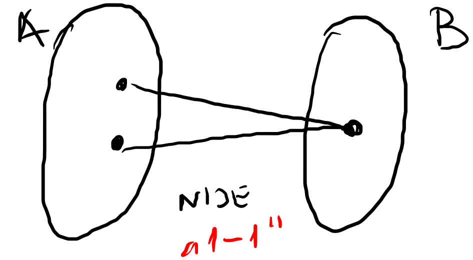
4. Ako su $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, odrediti
   a) f(g(x))
   b) g(f(x))
   c) g(1/f(x))

a) $f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 + 1$

b) $g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1+1}$

c) $g\left(\frac{1}{f(x)}\right) = g\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1} + 1}$

Bijekcija



Funkcija $f : A \to B$ je **bijekcija** ako važi:

„1 – 1"

1.f je **injekcija** ili injektivno preslikavanje, ako se svaki element iz skupa A preslikava u različit element skupa B

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}$

$1 \neq -1 \Rightarrow f(1) = f(-1)$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\{ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ \}$$

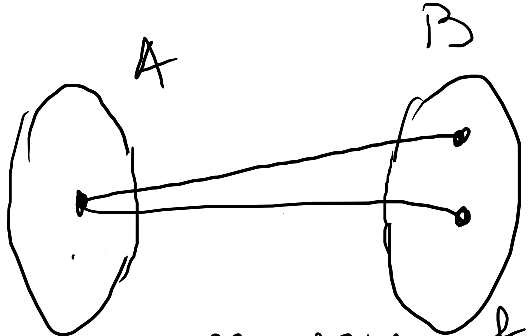
„NA"

2. *f* je **surjekcija** ili surjektivno preslikavanje, ako je svaki element iz *B* slika nekog elementa iz *A*, *f(A)=B.*

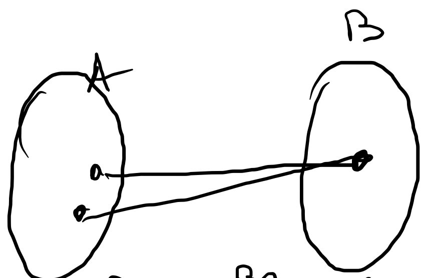
$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$$

"za svako y iz B postoji x iz A takav da važi f(x)=y".

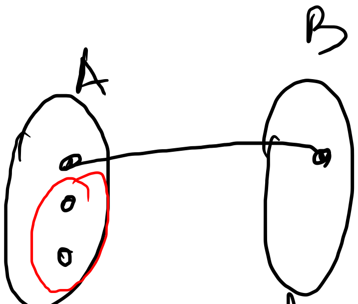
Odnosno, funkcija je bijekcija ako **svakom** elementu iz B odgovara ***tačno jedan*** element iz A.



DA BI BILA $f: A \to B$ OVO NE SME

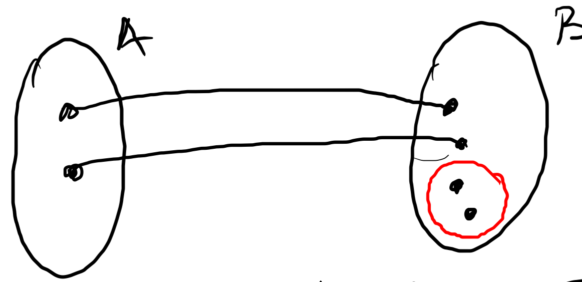


DA BI BILA $f: A \xrightarrow{\text{"1-1"}} B$ OVO NE SMĚ



DA BI BILA $f: A \to B$

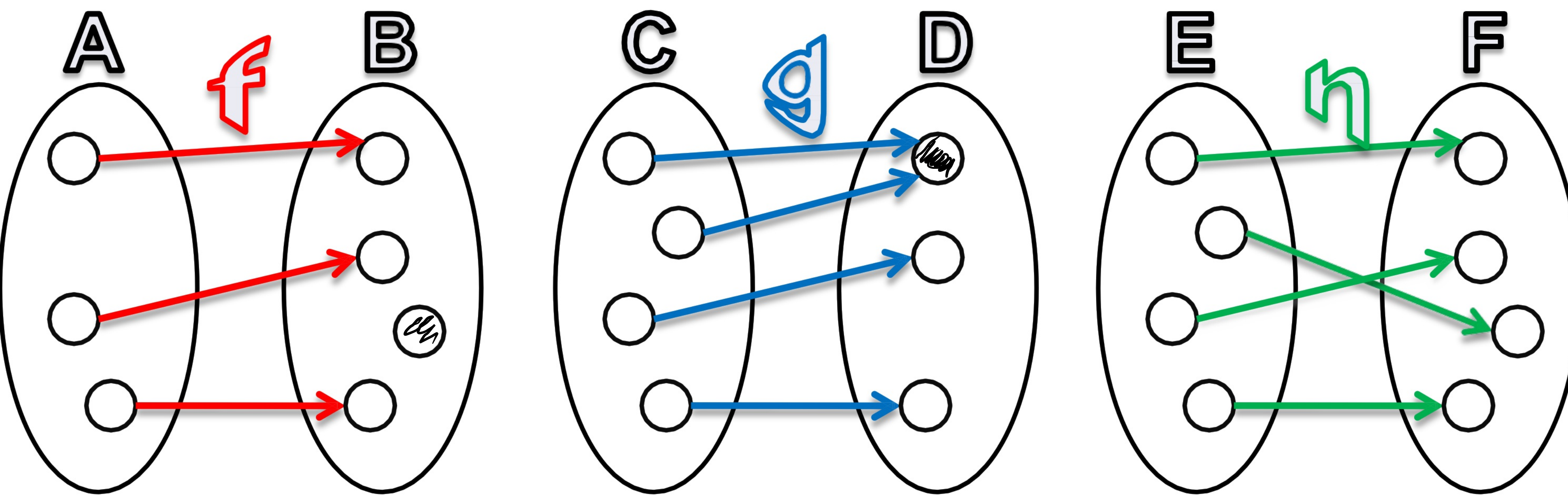
OVO NE SME



DA BI BILA $f: A \xrightarrow{\text{"NA"}} B$

OVO NE SMĚ

Injekcija, surjekcija, bijekcija



INJEKCIJA SURJEKCIJA BIJEKCIJA

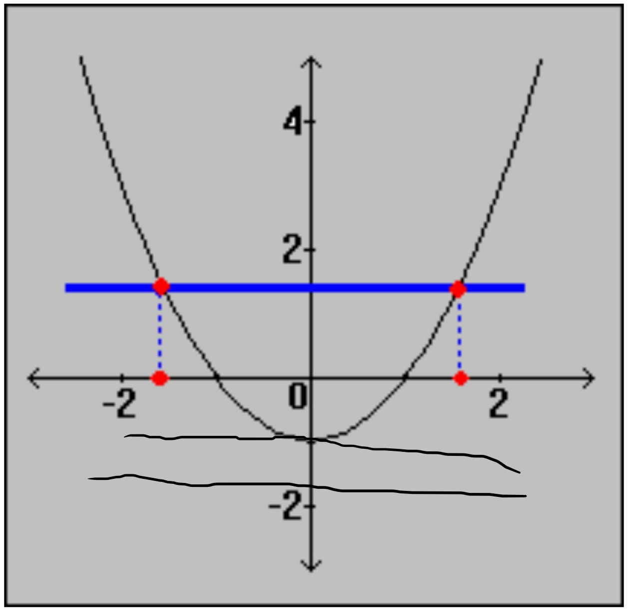
„1–1"

NIJE „NA"

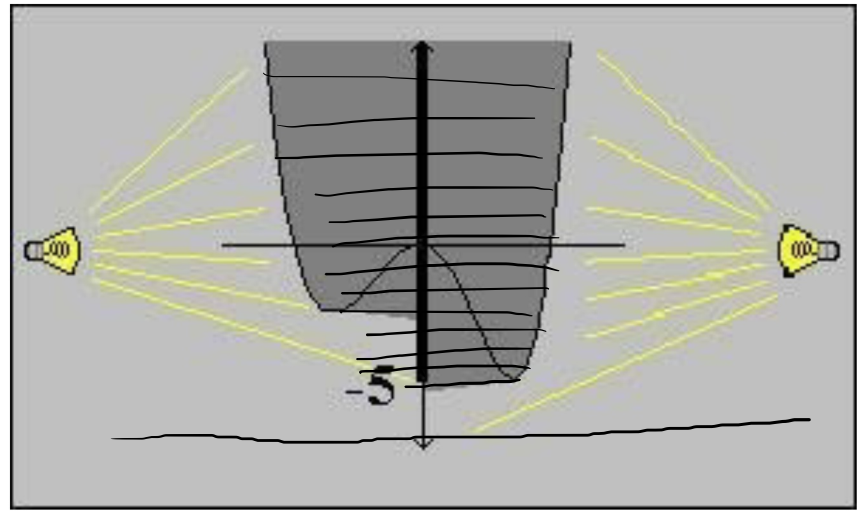
NIJE „1–1"

„NA"

KAKO SE MOŽE NA OSNOVU GRAFIKA ODREDITI DA LI JE FUNKCIJA “1-1” ILI “NA”?

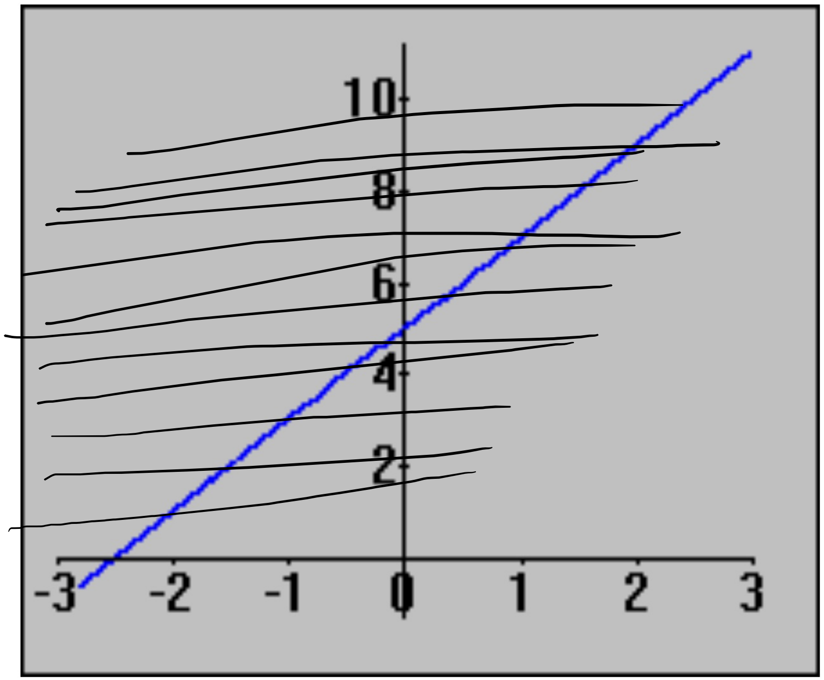


Test horizontalne prave: ako prava seče grafik na više od jednog mesta, funkcija nije “1-1”

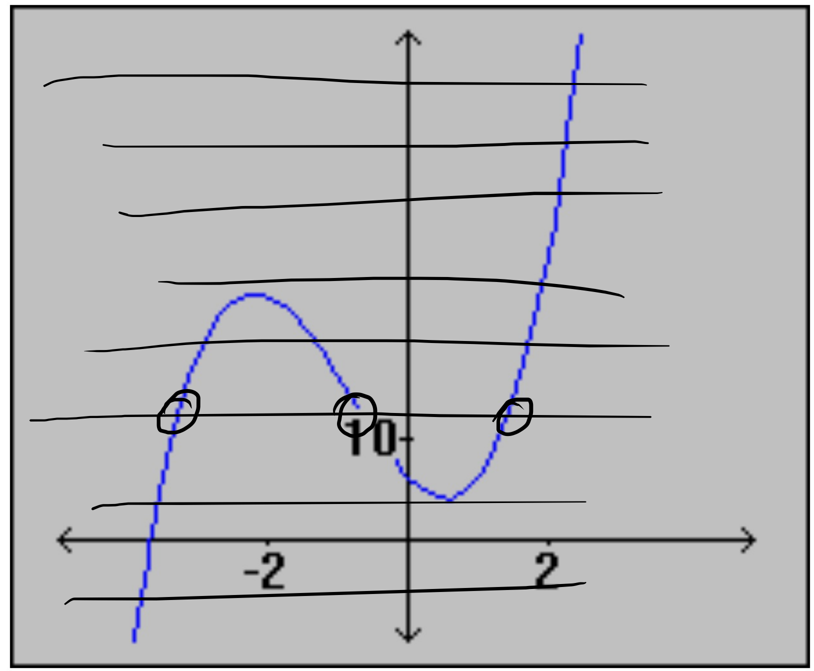


Ako projekcija na y-osu pokriva ceo kodomen, tada je funkcija “na”. Funkcija sa desne strane nije “na” na R, ali je “na” na intervalu [-5,+∞).

Primeri



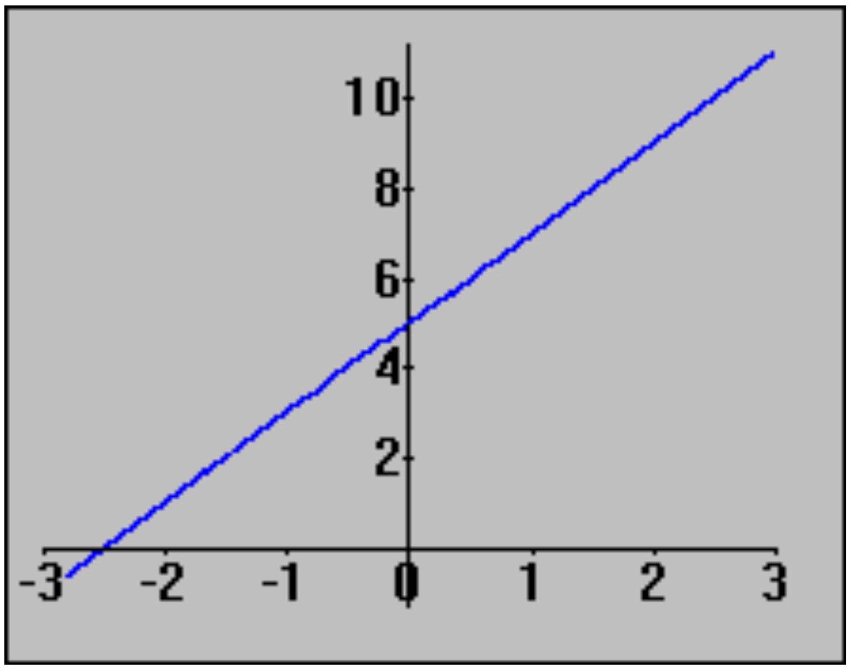
BIJEKCIJA

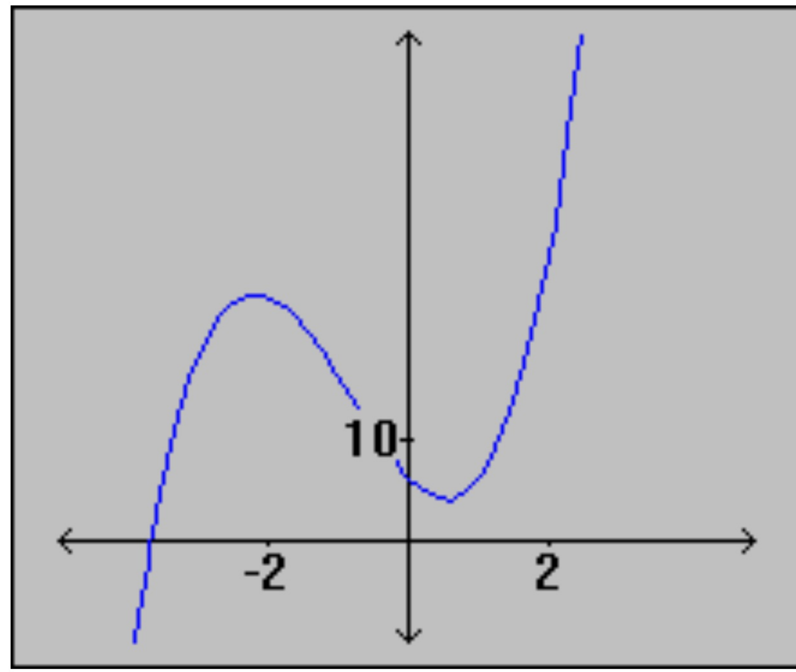


NIJE „1-1"

JESTE „NA" NA R

Primeri

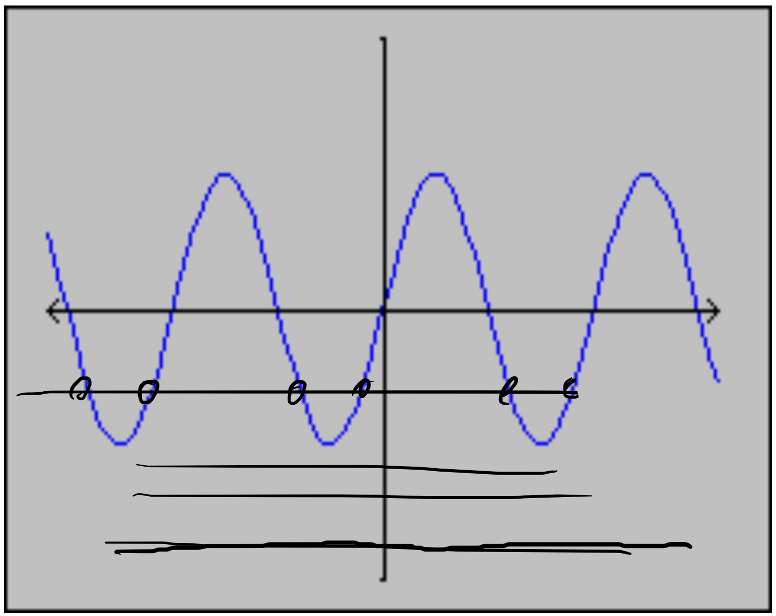


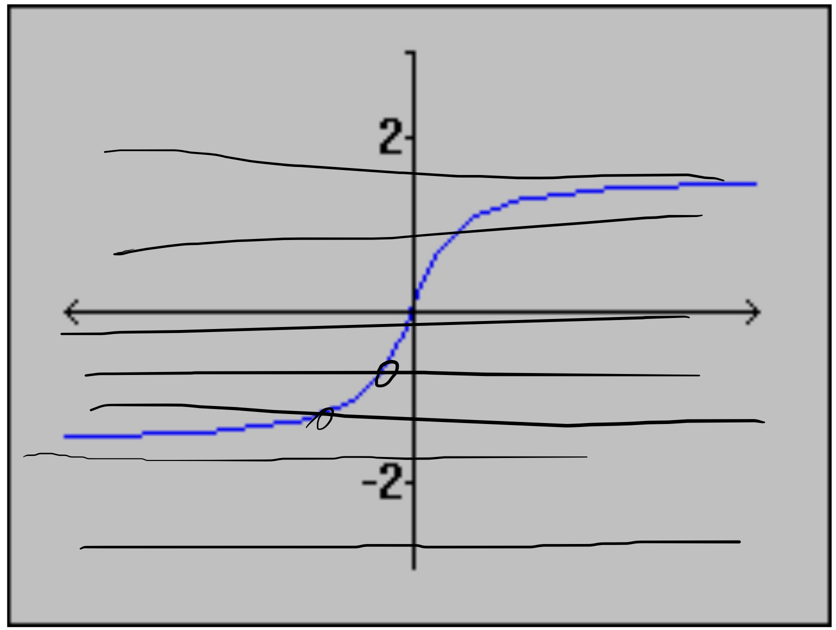


$f(x)=2x+5$ je bijekcija na R

f(x)= $2x^3 + 5x^2 - 7x + 6$ *je “na” na R, ali nije “1-1”*

Primeri





NIJE „1-1"

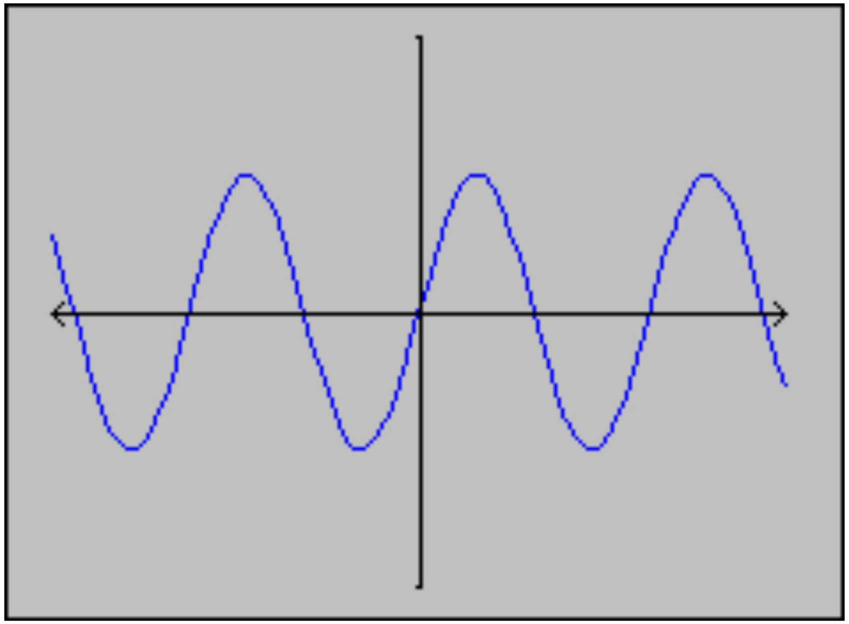
NIJE „NA" NA $\mathbb{R}$

JESTE „1-1"

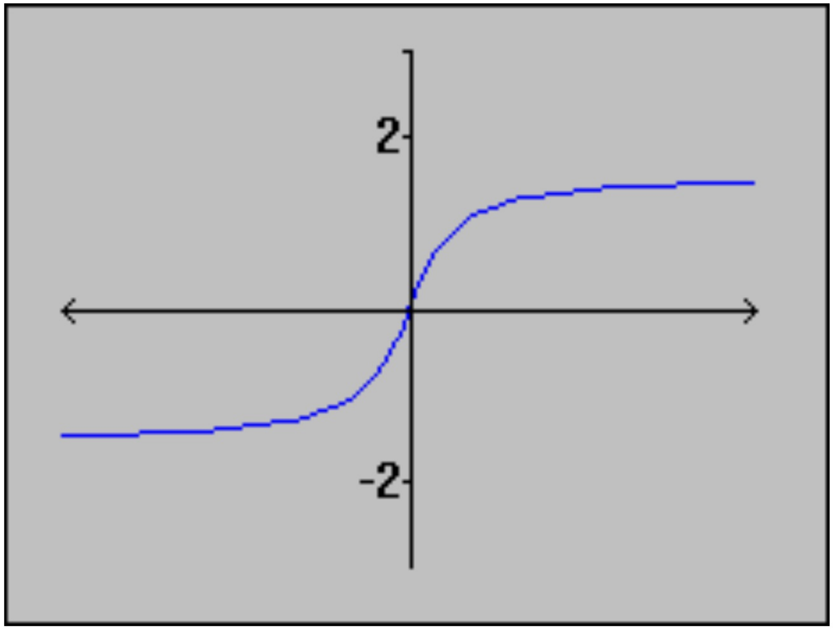
NIJE „NA" NA $\mathbb{R}$

JESTE „NA" $(-2,2)$

Primeri

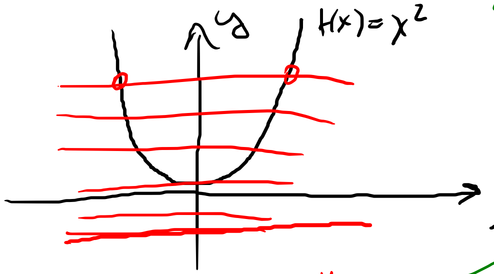


f(x) nije ni “1-1” ni “na” na R



f je “1-1” , ali nije “na” na R

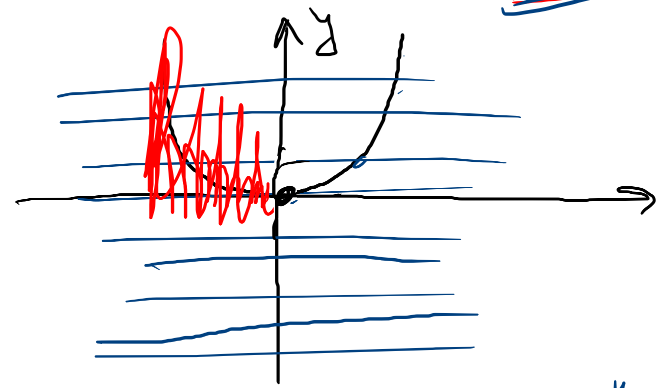
1) $f(x)=x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



NIJE „1-1"

NIJE „NA"

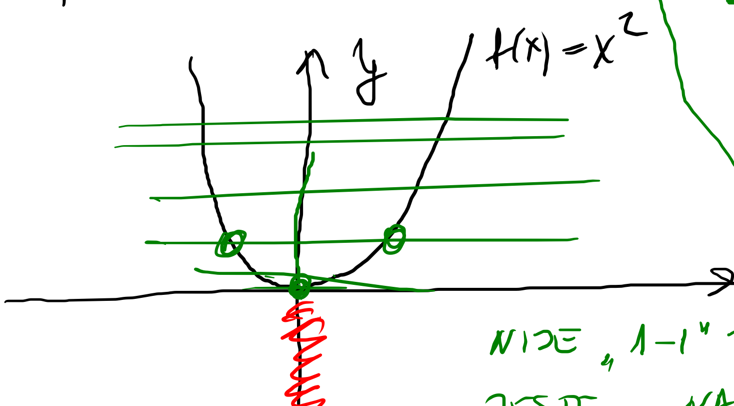
2) $f(x)=x^2$, $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$



JESTE „1-1"

NIJE „NA"

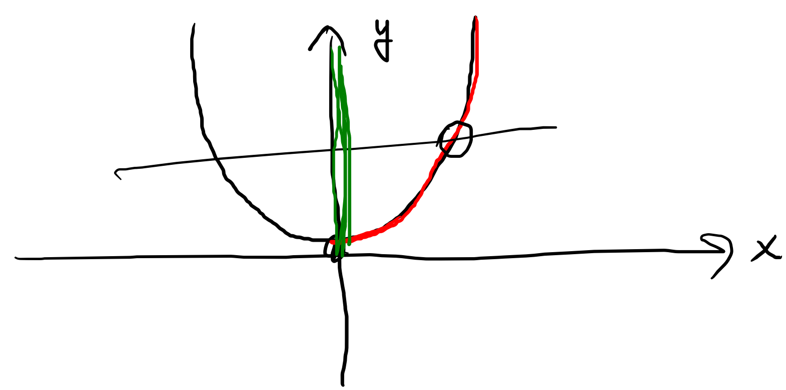
2) $f(x)=x^2$ $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$

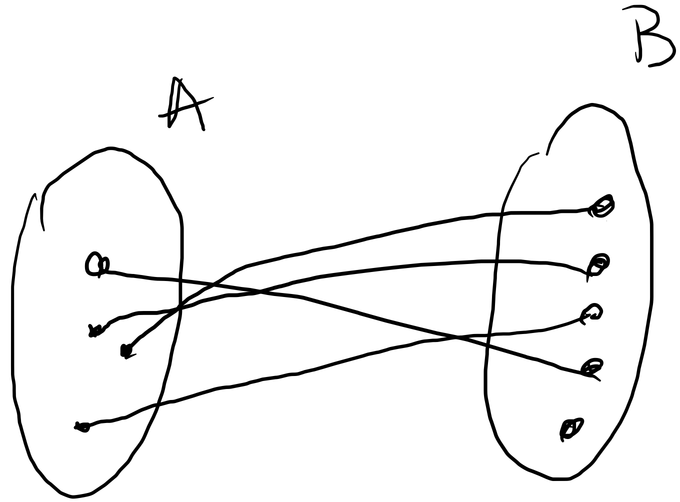


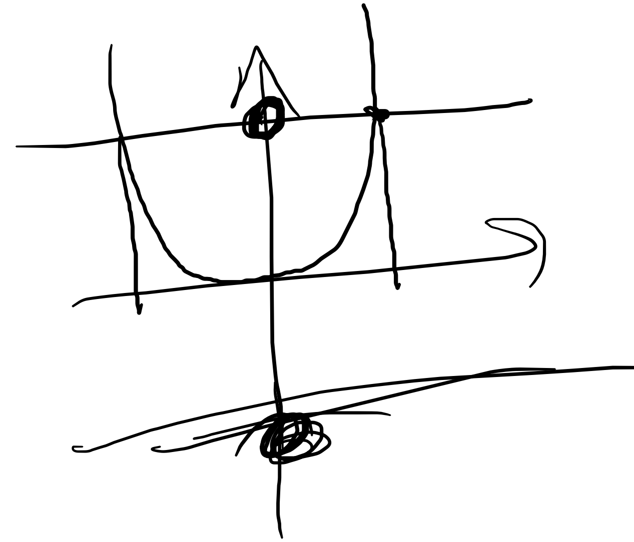
NIJE „1-1"

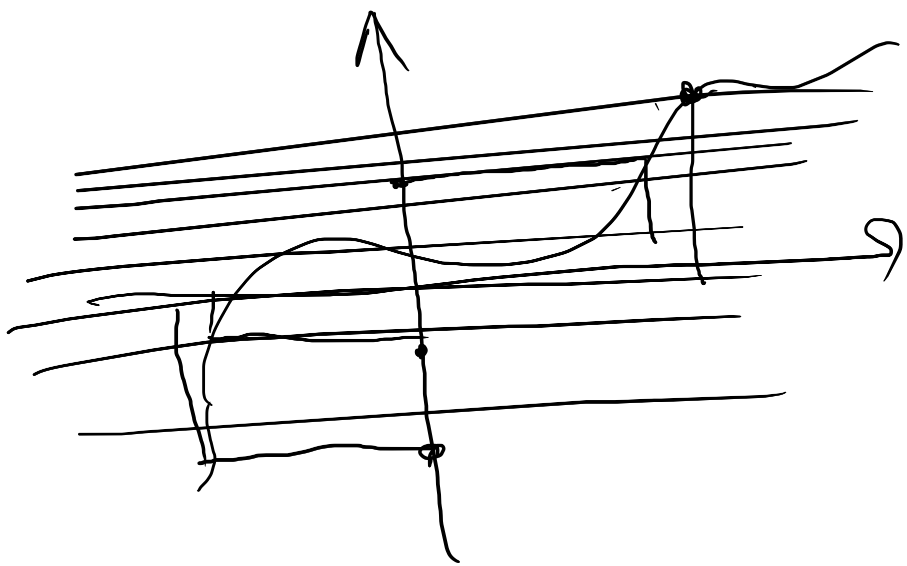
JESTE „NA"

3) $f(x)=x^2$ $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$




A
B


y


y