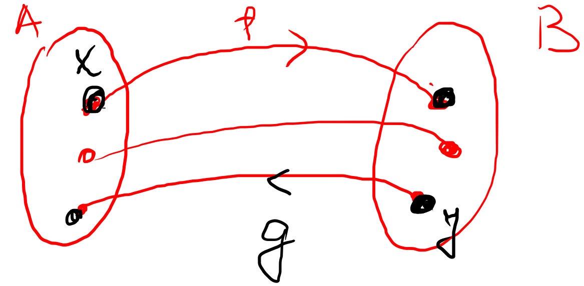
Inverzna funkcija



- Ako je $f : A \to B$ bijekcija onda se može definisati funkcija $g : B \to A$ tako da važi:

$$f(g(y)) = y \qquad \forall y \in B$$

$$\boxed{g(f(x)) = x} \qquad \forall x \in A$$

$f(x) = x$

- Funkciju *g* nazivamo **inverznom** funkcijom za *f* i označavamo sa f^{-1}

$$f \circ f^{-1} = 1_B \qquad f^{-1} \circ f = 1_A$$

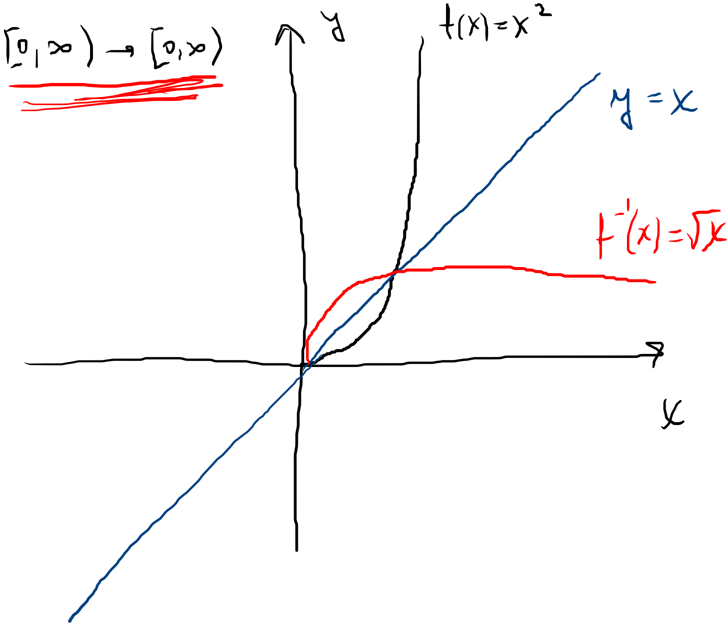
$f^{-1}(f(x)) = x$

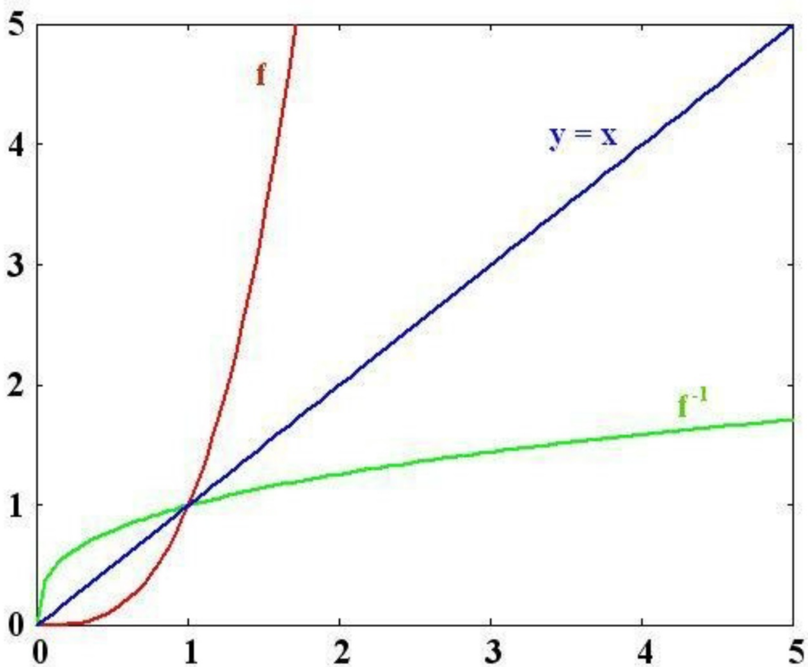
Identička funkcija: $1_B : B \to B$, $1_B(b)=b$ $\quad \forall b \in B$

$1_A : A \to A$, $1_A(a)=a$ $\quad \forall a \in A$

Grafička analiza inverzne funkcije

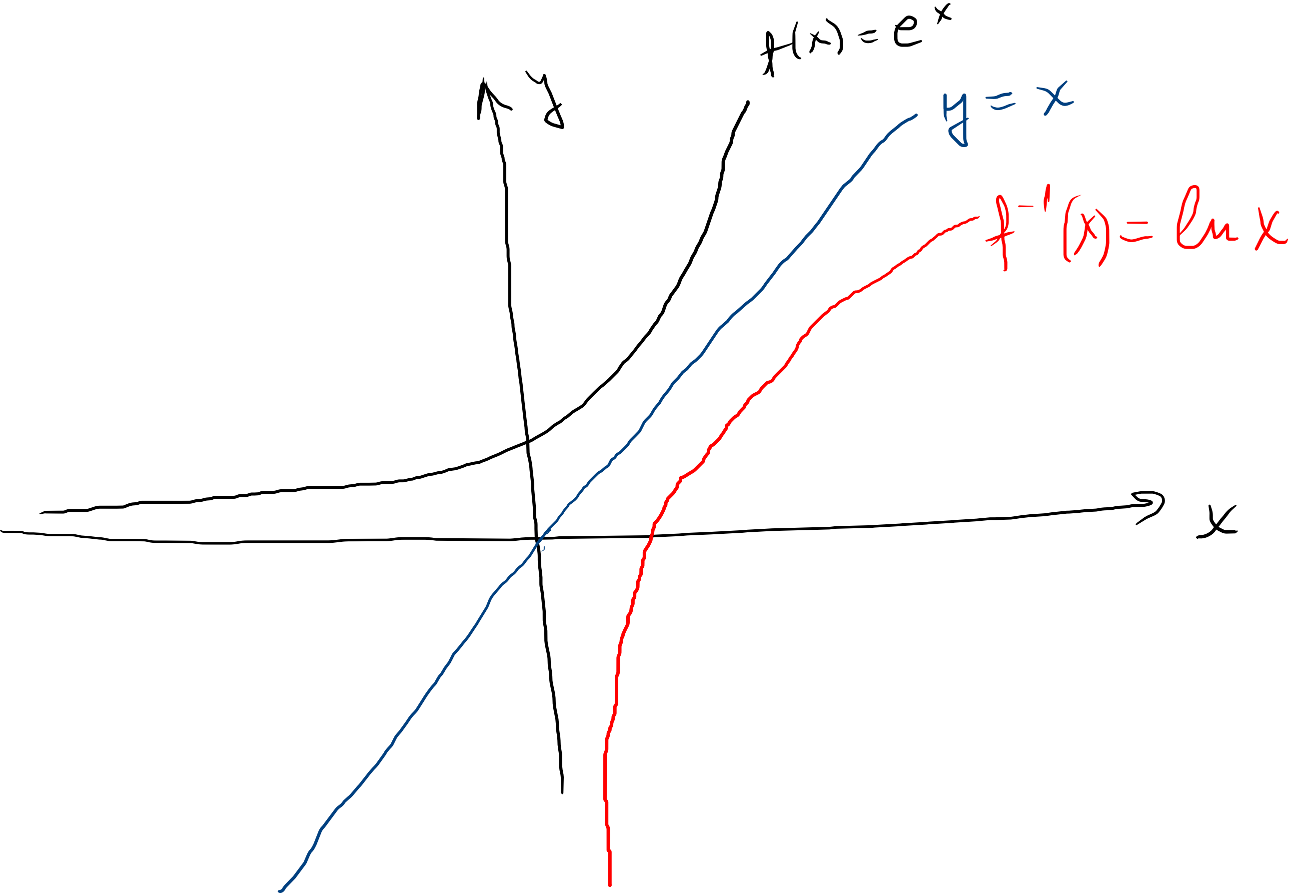
$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$





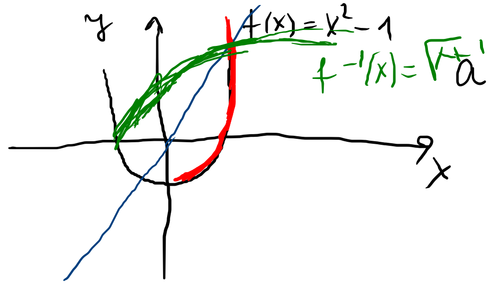
$-(x^2) = x$

Grafik inverzne funkcije je simetričan grafiku funkcije f u odnosu na pravu y=x, tj. ako je $(x,y) \in \Gamma_f$, onda je $(y,x) \in \Gamma_{f-1}$.



$f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$

Određivanje inverzne funkcije



Inverzna funkcija se može računati sledećim postupkom:

1) Jednačinu $y = f(x)$ rešimo po nepoznatoj x

2) Ako postoji jedinstveno rešenje te jednačine onda funkcija ima inverznu funkciju, $x = f^{-1}(y)$

3) Zamenimo nepoznate y i x da bismo dobili $y = f^{-1}(x)$.

Zadatak: Za funkciju $f(x)$ izračunati inverznu funkciju i odrediti njen domen

ZAŠTO NIJE „1-1" NA $\mathbb{R}$?

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

$f(x) = f(y) \rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$

$\Rightarrow x^2 = y^2$

$\Rightarrow x = y \lor x = -y$

NIJE „1-1" NA $\mathbb{R}$

a) $f(x) = x^2 - 1$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$\boxed{f^{-1}(x^2 - 1) = x}$

$x^2 - 1 = t$

$x^2 = t + 1$

$x = \pm\sqrt{t+1}$

$D = \mathbb{R}$ – NIJE „1-1"

– NIJE BIJEKCIJA

– NEMA INVERZNE

$D_x = [0, \infty)$ – JESTE BIJEKCIJA

$x = \sqrt{t+1}$

$f^{-1}(t) = \sqrt{t+1}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}}$

b, $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

$D = \mathbb{R}$

1-1": $\boxed{f(x) = f(y) \Rightarrow x = y}$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1}\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right) = x$

t

$\sqrt[3]{1-x^3} = t \quad /^3$

$1-x^3 = t^3$

$-x^3 = t^3 - 1$

$x^3 = 1 - t^3$

$x = \sqrt[3]{1-t^3}$

$\underline{f(x) = f(y)} \Rightarrow \sqrt[3]{1-x^3} = \sqrt[3]{1-y^3} \quad /^3$

$\Rightarrow \cancel{1} - x^3 = \cancel{1} - y^3$

$\Rightarrow -x^3 = -y^3$

$\Rightarrow x^3 = y^3$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = y}}$

$f^{-1}(t) = \sqrt[3]{1-t^3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

c) $f(x) = 2x+5$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f^{-1}(2x+5) = x$$

t

$$2x+5 = t$$

$$2x = t-5$$

$$x = \frac{t-5}{2}$$

$$f^{-1}(t) = \frac{t-5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

Domen funkcije

Primer 1

$\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Odrediti domen funkcije $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

Rešenje: Imenilac razlomka mora da bude različit od nule, tj. $x - 3 \neq 0$

Prema tome domen funkcije je skup D(f) = R\{3} odnosno $x \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

Primer 2

Odrediti domen funkcije $y = \sqrt{4 - x^2}$

Rešenje: Potkorena veličina mora da bude veća ili jednaka od nule tako da domen funkcije je $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geq 0 \Leftrightarrow D : x \in [-2, 2]$.

Primer 3

Odrediti domen funkcije $y = x^2 + 2x$ **Rešenje:** D(f)=R

Primer 4

Odrediti domen funkcije $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ **Rešenje:** D(f)=R

Nula funkcije

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$
$$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

- **Nula** funkcije je onaj broj $a \in D$ za koji je $f(\alpha) = 0$

- Nule funkcije su tačke preseka funkcije sa Ox osom.

Primer:

Odrediti nulu funkcije $y = x^2 - 5x + 6$

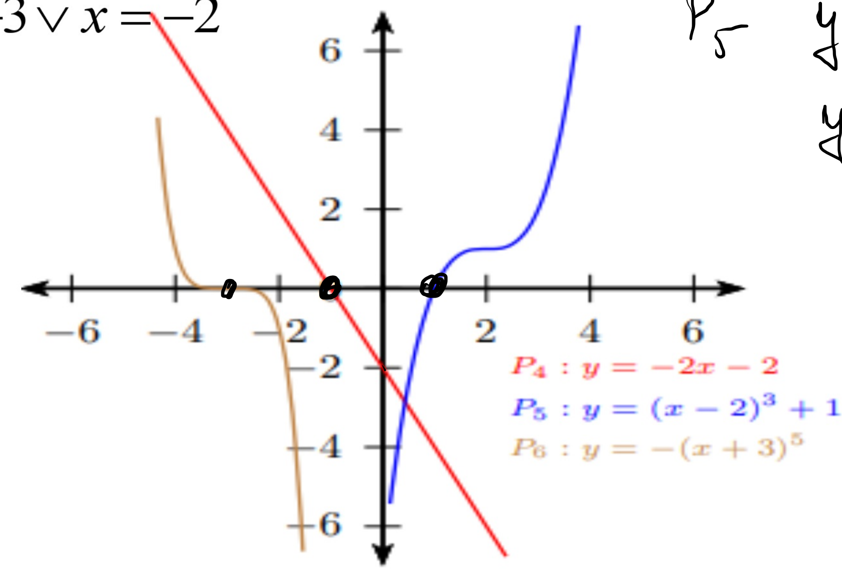
Rešenje:

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$$

P_4
$$y = -2x - 2$$
$$y = 0$$
$$-2x - 2 = 0$$
$$-2x = 2$$
$$x = -1$$

P_5
$$y = (x-2)^3 + 1$$
$$y = 0$$
$$(x-2)^3 + 1 = 0$$
$$(x-2)^3 = -1$$
$$x - 2 = -1$$
$$x = 1$$

P_6
$$y = -(x+3)^5$$
$$y = 0$$
$$-(x+3)^5 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$



$D = (-2, 2)$

$D = (-1, 2)$

Parnost funkcije

- Neka je $f : D \to \mathfrak{R}$, zadata na simetričnom skupu D ($x \in D \Rightarrow -x \in D$). Ako $\forall x \in D$ važi:

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

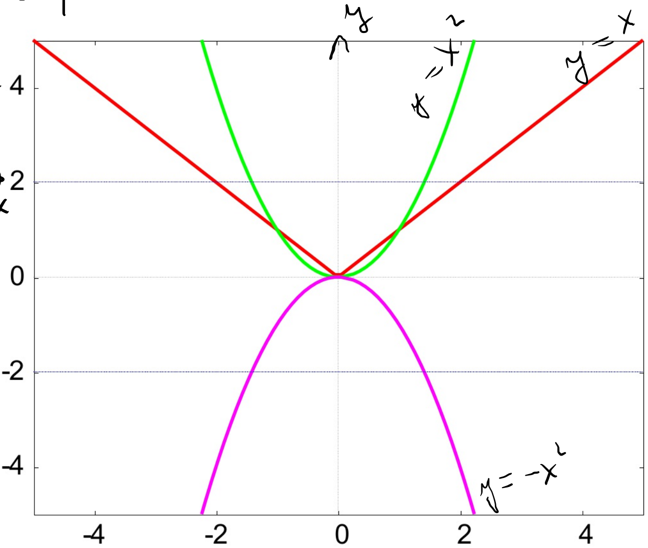
PARNA

$f(x) = \cos x$

$f(x) = x^2$

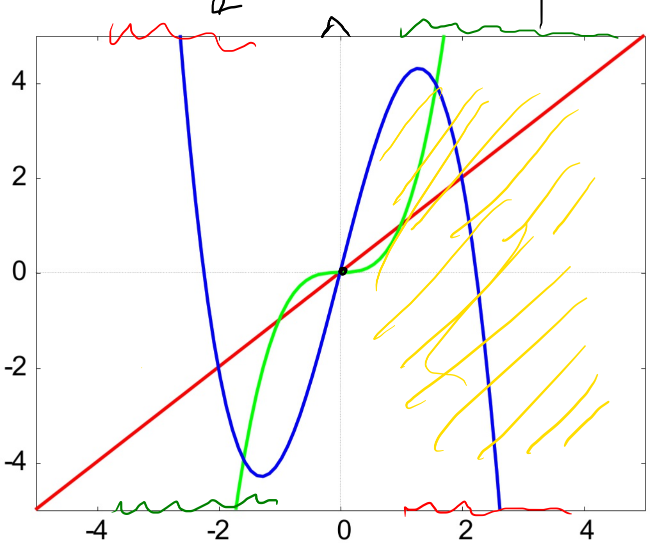
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

$f(-x) = f(x)$ f je *parna*.



Grafik je simetričan u odnosu na y-osu

$f(-x) = -f(x)$ f je *neparna*.



Grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak

NEPARNU

$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Primer

Ispitati parnost i neparnost funkcija:

a) $f(x)=x^3-2x$ $\quad D=\mathbb{R}$

b) $f(x)=x^2-2$ $\quad D=\mathbb{R}$

c) $f(x)=x^2-2x^3+1$ $\quad D=\mathbb{R}$

Rešenje:

a) $f(-x)=(-x)^3-2(-x)=\overset{\neq f(x)}{-x^3+2x}=-(\underbrace{x^3-2x})=-f(x)$ funkcija je neparna.

b) $f(-x)=(-x)^2-2=x^2-2=f(x)$ funkcija je parna.

c) $f(-x)=(-x)^2-2(-x)^3+1=\underbrace{x^2+2x^3+1}_{\neq f(x)}$ funkcija nije ni parna ni neparna.

$= -(\underbrace{-x^2-2x^3-1}_{= f(x)})$

Zadatak:

6. Koje od sledećih funkcija su parne, a koje neparne?

$a)\ f(x) = x + x^2$

$b)\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$c)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

$d)\ f(x) = x\,|\,x\,|$

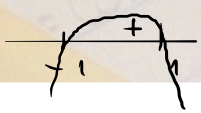
$e)\ f(x) = \sqrt[3]{x - x^3}$

a) $D = \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x) + (-x)^2 = \underbrace{-x + x^2}_{\neq f(x)} = -\underbrace{(x - x^2)}_{\neq f(x)}$ „NI - NI"

b) $D = [-1, 1]$ jer $1 - x^2 \geq 0$

$(1-x)(1+x) \geq 0$



$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$

PARNA

c) $x^2 - 1 \neq 0$

$x \neq \pm 1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x}{x^2 - 1} = -\left(\dfrac{x}{x^2 - 1}\right) = -f(x)$ $f(x)$

NEPARNA

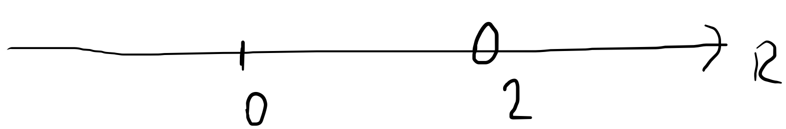
6 $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

$x - 2 \neq 0$

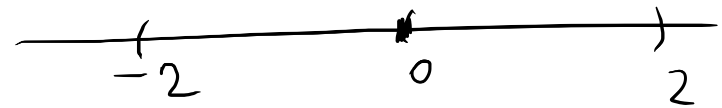
$x \neq 2$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

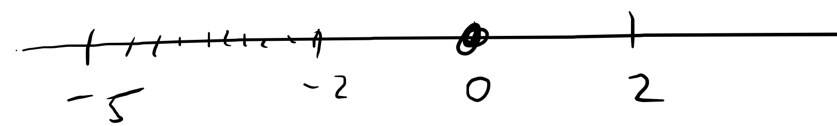
NIJE SIMETRIČAN
DOMEN → „NI-NI"



$D = (-2, 2)$



$D = (-5, 2)$



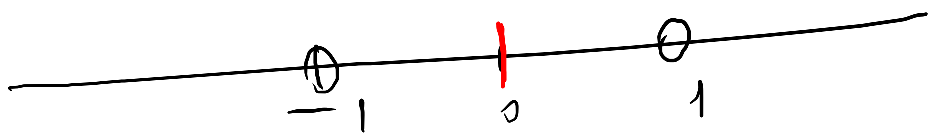
$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$$

$x^2 - 1 \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 \neq 1 \\ x \neq \pm 1 \end{array}}$$!

$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$



$$f(-x) = \frac{-x+3}{(-x)^2 - 1}$$

$$= \frac{-x+3}{x^2-1} \neq f(x)$$

$$= -\frac{x-3}{x^2-1} \neq f(x)$$

$\Rightarrow$ „N1 – N1"

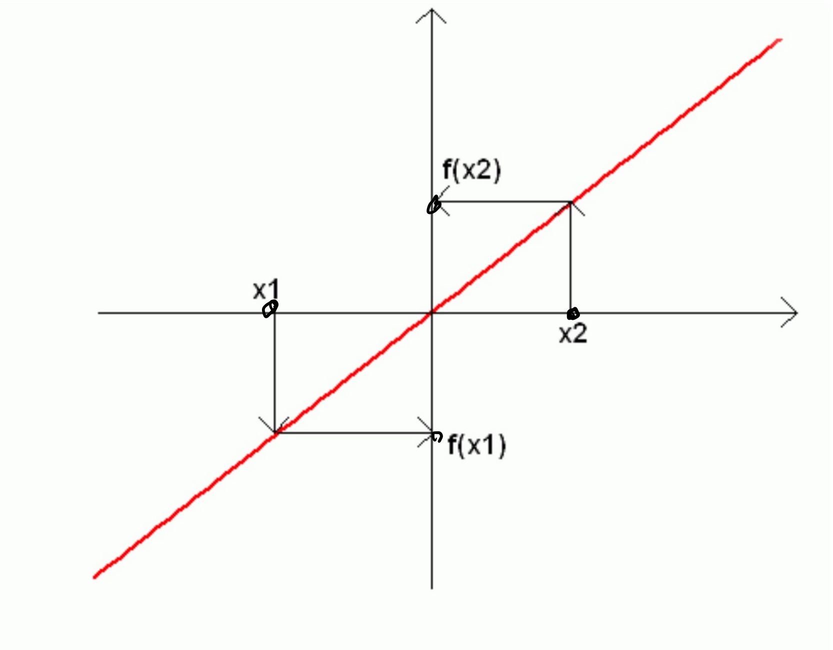
Monotone funkcije

- Neka je $f : D \to \Re$, $D \subseteq \Re$. Ako $\forall x_1, x_2 \in (a,b) \subseteq D$ važi:

$(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$

kažemo da funkcija

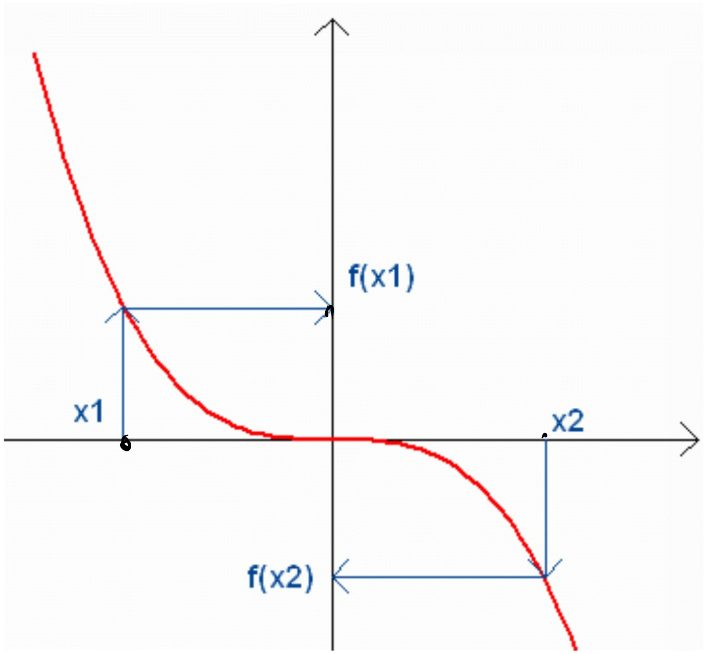
monotono raste

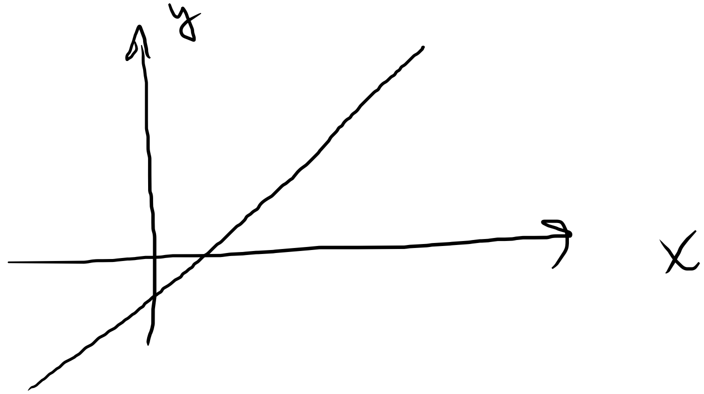


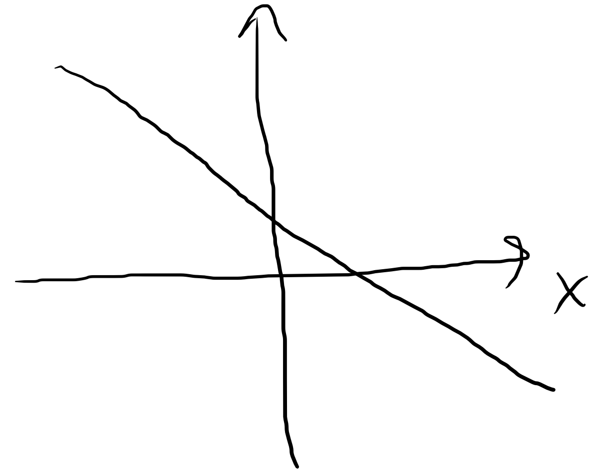
$(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))$

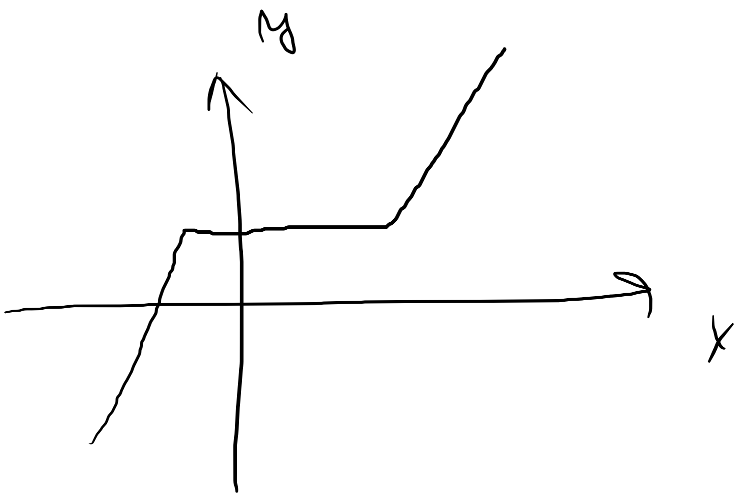
kažemo da funkcija

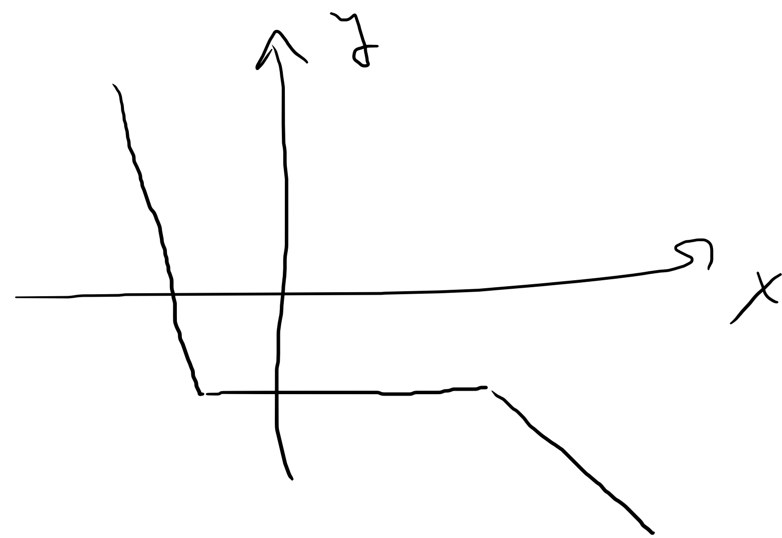
monotono pada.

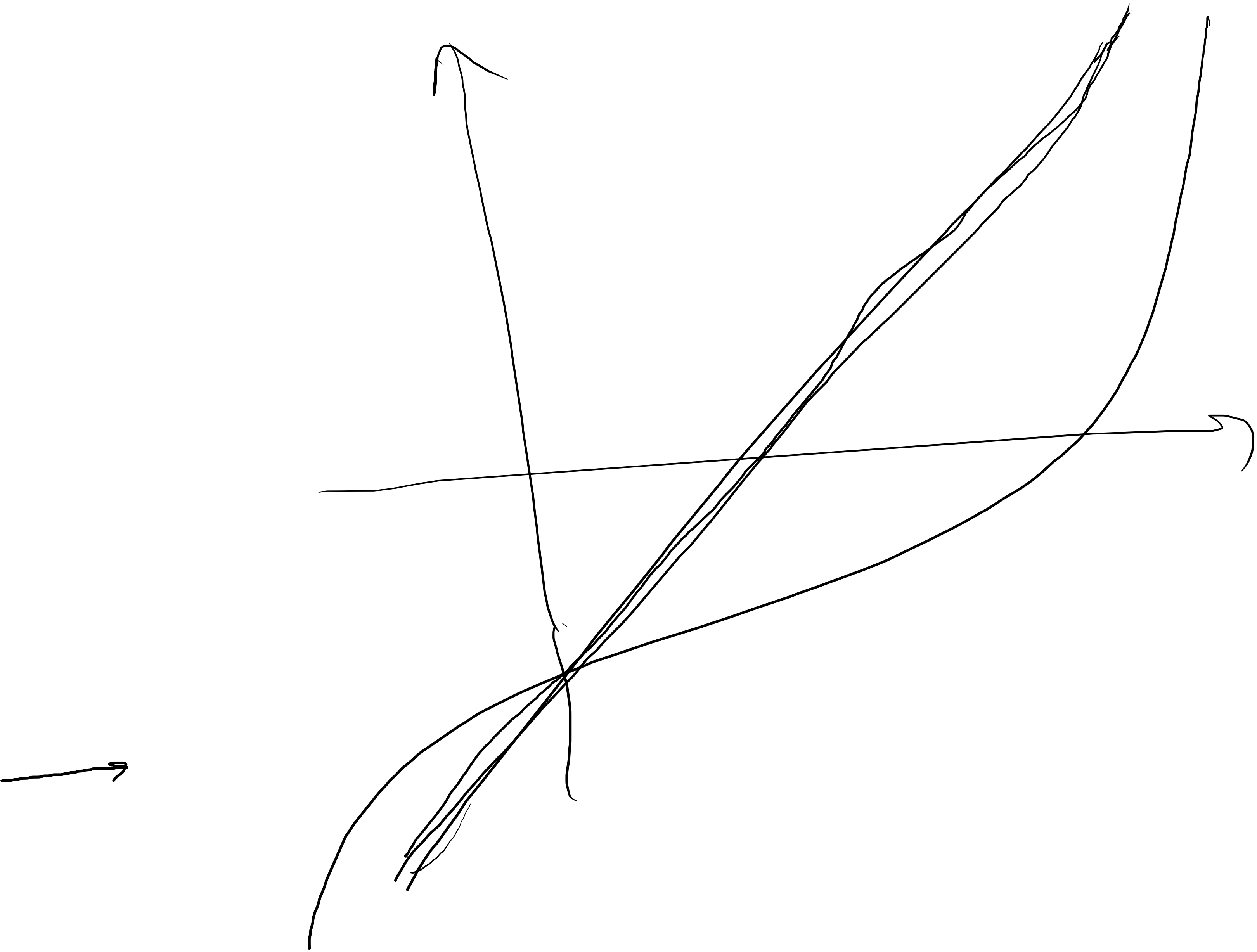


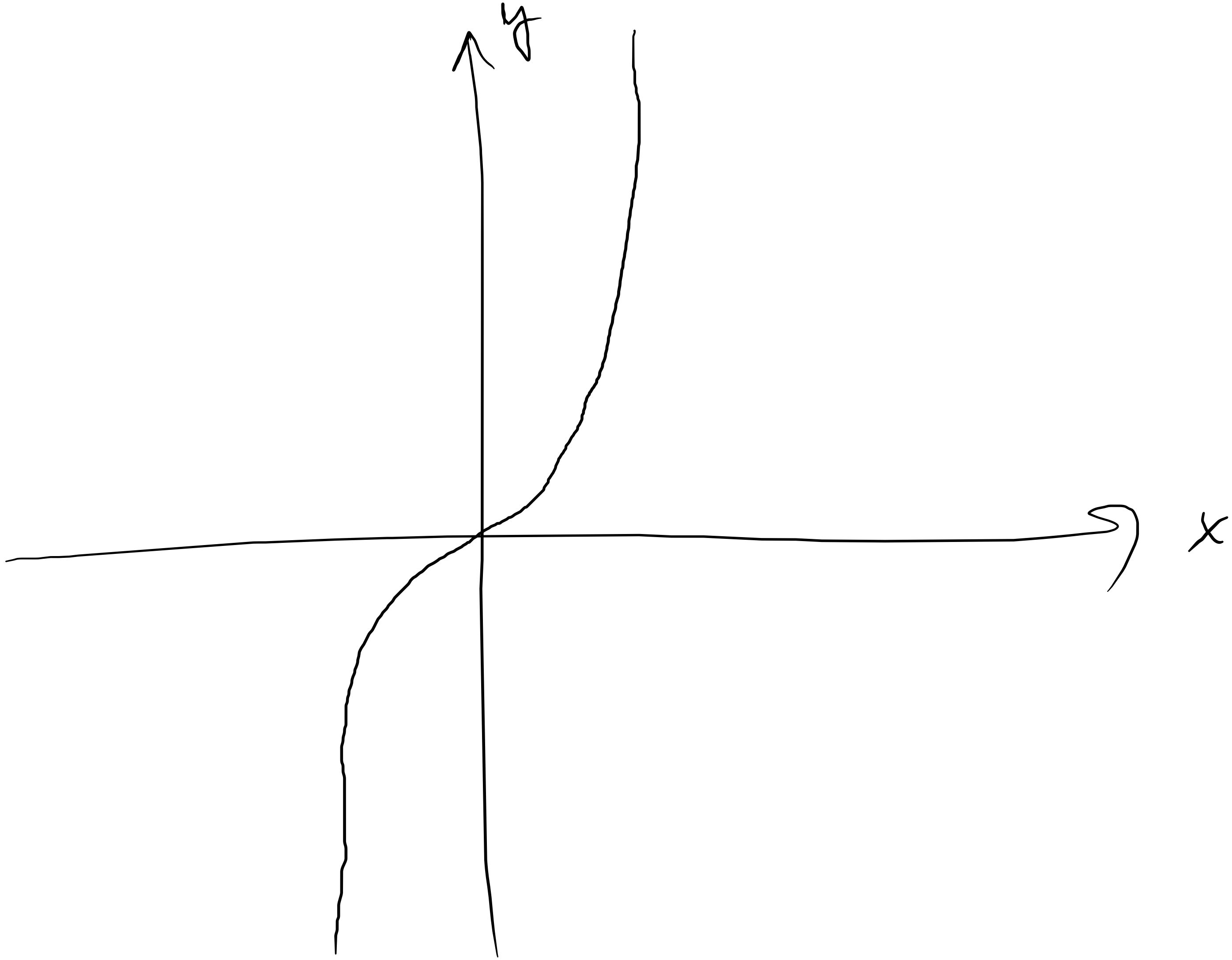

y
x


x


y
x


y
x




y
x