LINEARNE TRANSFORMACIJE

Neka su $\boldsymbol{V}_1 = (V_1, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ **i** $\boldsymbol{V}_2 = (V_2, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ vektorski prostori nad istim poljem $\boldsymbol{F} = (F, +, \cdot)$. Tada se funkcija $f : V_1 \longrightarrow V_2$ naziva **linearna transformacija** ili **homomorfizam** vektorskog prostora V_1 u vektorski prostor V_2 ako za svako $x, y \in V_1$ i $\alpha \in F$ važi

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Napomena: Ova dva uslova mogu i da se spoje u jedan koji bi onda glasio: za svako $x, y \in V_1$ i $\alpha, \beta \in F$ važi

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Svaka linearna transformacija $f : V_1 \longrightarrow V_2$ preslikava nula vektor prostora V_1 u nula vektor prostora V_2.

Neka je $f : V_1 \longrightarrow V_2$ linearna transformacija vektorskog prostora V_1 u vektorski prostor V_2. Tada je:

- **jezgro** linearne transformacije f: skup svih vektora iz V_1 koji se preslikaju u nula vektor vektorskog prostora V_2, tj.

  $$ker(f) = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}.$$

  Osobine:

  - nula vektor $0 \in V_1$ pripada skupu $ker(f)$;
  - skup $ker(f)$ čini potprostor prostora V_1;

- **slika** linearne transformacije f: skup svih vektora iz V_2 koji se dobijaju preslikavanjem vektora vektorskog prostora V_1, tj.

  $$Img(f) = \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1,\ f(x) = y\}.$$

  Osobine:

  - nula vektor $0 \in V_2$ pripada skupu $Img(f)$;
  - skup $Img(f)$ čini potprostor ptostora V_2.

- **rang** linearne transformacije f: dimenzija potprostora slika, tj.

  $$rang(f) = dim(Img(f)).$$

Ako je $\boldsymbol{V} = (V, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ vektorski prostor nad poljem $\boldsymbol{F}$ dimenzije $n \in \mathbb{N}$, tada je on izomorfan sa vektorskim prostorom $\boldsymbol{F}^n = (F^n, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ uređenih n-torki elemenata polja $\boldsymbol{F}$ sa standardno definisanim sabiranjem po komponentama i množenjem skalarom po komponentama.

Na osnovu ove osobine može se zaključiti da je dovoljno proučavati samo vektorski prostor uređenih n-torki i samo linearne transformacije oblika $f : F^n \longrightarrow F^m$, jer su na taj na čin proučeni svi vektorski prostori i sve linearne transformacije.

Zbog toga je svaki n-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ izomorfan sa vektorskim prostorom $\boldsymbol{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ i uobičajeno je da se posmatraju linearne transformacije oblika $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Neka je $\boldsymbol{F}$ proizvoljno polje. Preslikavanje $f : F^n \longrightarrow F^m$ je linearna transformacija akko je f oblika

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ &\ldots, \\ &\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n) \\ = &\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gde su $\alpha_{ij} \in F$ neki elementi polja $\boldsymbol{F}$ i tada je $M_f = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$ matrica linearne transformacije f (u standardnoj bazi ako drugačije nije naglašeno).

Dakle,

- svaka od m komponenti slike linearne transformacije $f : F^n \longrightarrow F^m$ mora biti oblika $t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in F$.

- svaka linearna transformacija $f : F^n \longrightarrow F^m$ može se poistovetiti sa njoj odgovarajućom matricom $M_f = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$ nad poljem $\boldsymbol{F}$ takvom da je
$$f(x) = y \Longleftrightarrow M_f \cdot [x] = [y]$$
gde su $[x] = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ i $[y] = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$ matrice kolone koje odgovaraju vektorima x i y.

Linearna transformacija je **regularna** akko je bijektivna, tj. akko je njoj odgovarajuća matrica kvadratna i regularna (tada je f izomorfizam).

Rang linearne transformacije $f : F^n \longrightarrow F^m$ jednak je rangu njene matrice M_f, odnosno
$$dim\,(Img\,(f)) = rang\,(M_f)\,.$$

Ako su $f : F^n \longrightarrow F^k$ i $g : F^k \longrightarrow F^m$ linearne transformacije, i ako su M_f i M_g njima odgovarajuće matrice, tada je $h = g \circ f : F^n \longrightarrow F^m$ takođe linearna transformacija i njena matrica se može dobiti kao $M_h = M_g \cdot M_f$.

ZADACI

(1) Za date funkcije ispitati da li su linearne transformacije i za one koje jesu naći matricu i rang.
  (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(x^2 - y, x + y\right)$;
  (b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (2x - y, 3x, y + 1)$;
  (c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x - y + 2z, -x + 3y + z)$;
  (d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 3x + 2y - z$;
  (e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x + y, 0)$;
  (f) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x, \cos(xy))$;
  (g) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x}$;
  (h) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$;
  (i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;
  (j) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\ln 2 \cdot x, x + y)$.

(2) Za sledeće funkcije diskutovari po realnim parametrima kada su linearne transformacije i u slučaju kada jesu naći njihove matrice i odrediti rang.
  (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \left(ax + y^b, bx - z\right)$;
  (b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = ax + bxy + cy$;
  (c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \left(2^{ay}x + yz^b, ax + by + cz\right)$;
  (d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = ((ax - b)\,y, x + ab)$;
  (e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \left(\frac{ax+b}{bx+a} + y, \sin(bx) + az\right)$;
  (f) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = \left(x \cdot 5^{(a-1)y+b}, (\ln b)\,y^2, ax + cy\right)$.

(3) Za date funkcije ispitati da li su linearne transformacije i za one koje jesu naći jezgro, sliku, rang i matricu.
  (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x - 3y, -2x + 6y, 3x - 9y)$;
  (b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x + y + z, 2x - 3y + 5z, -2x - 7y + z)$.

(4) Neka su linearne transformacije $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definisane sa $f(x,y) = (2x - y, x + 3y)$ i $g(x,y) = (-x + y, 3x - 2y)$.
  (a) Odrediti kopoziciju $f \circ g$.
  (b) Napisati matrice M_f i M_g linearnih transformacija f i g.
  (c) Naći linearnu transformaciju h koja odgovara matrici $M_f \cdot M_g$ i uporediti je sa $f \circ g$.
  (d) Odrediti f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

(5) Neka su linearne transformacije $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definisane sa $f(x,y,z) = (x - 2y, y + z, -2x + y - z)$ i $g(x,y,z) = (x + 2y + 3z, x - z, 2y + 4z)$.
  (a) Napisati matrice M_f i M_g linearnih transformacija f i gi odrediti njihov rang.
  (b) Odrediti $f \circ g.$, f^{-1}, $ker\,(g)$ i $Img\,(g)$.

(6) Dati su vektori $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, -1, 1)$ i $\vec{v} = (x, y, z)$. Neka su f, g i h funkcije date sa:
  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \vec{a} \times \vec{v} + (\vec{a} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{b}$;
  $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (y, z)$;
  $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $h(x,y) = (x - 2y, 2x + y, -y)$.
  Dokazati da je funkcija $F = h \circ g \circ f$ linearna transformacija i odrediti njenu matricu.

(7) Za sledeće funkcije ispitati, odnosno diskutovati po parametrima da li su linearne transformacije i u slučajevima kada jesu naći njihovu matricu, jezgro, sliku i rang.
  (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\vec{v}) = \dfrac{\vec{n} \times \vec{v}}{|\vec{n}|}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n} = (-1, 1, 2)$;
  (b) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g(\vec{v}) = (\vec{n} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{m}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n} = (1, 1, q)$, $\vec{m} = (0, 1, 0)$;

(c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $h(\vec{v}) = (\vec{n} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} \cdot \vec{m} + 2(\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{j}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n} = (1, 1, 2)$, $\vec{m} = (0, p)$, $\vec{j} = (0, 1)$.

(8) Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ data je sa $f(1, -1) = (-3, 6)$ i $f(-2, 1) = (2, -4)$. Odrediti $f(x, y)$ i odgovarajuću matricu M_f linearne transformacije f, a zatim naći njen rang. Da li postoji f^{-1}?

(9) Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data je sa $f(1, -1, 1) = (0, 2, 1)$, $f(2, 0, 3) = (-2, 13, 3)$ i $f(-1, 2, 0) = (-2, 5, -1)$. Odrediti $f(x, y, z)$, a zatim naći $ker(f)$ i $Img(f)$.

(10) Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data je sa $f(1, -1, 0) = (1, 0, 1)$, $f(1, 2, -4) = (0, -1, 2)$ i $f(-2, 0, 3) = (-1, 1, 0)$. Odrediti $f(x, y, z)$ i odgovarajuću matricu M_f linearne transformacije f, a zatim izračunati $f(-1, 3, 0)$.

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE

Zadatak 12.1; 12.2; 12.7; 12.8 (uzeti da je $g(x, y, z) = (x, y)$)