VEKTORSKI PROSTORI

Neka je $V \neq \emptyset$, $\boldsymbol{F} = (F, +, \cdot)$ polje, $+ : V^2 \longrightarrow V$, $\cdot : F \times V \longrightarrow V$ binarne operacije. Tada je uređena četvorka $\boldsymbol{V} = (V, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ **vektorski prostor** nad poljem $\boldsymbol{F}$ ako za svako $a, b \in V$ i svako $\alpha, \beta \in F$ važi:

V_1: $(V, +)$ je Abelova grupa;
V_2: $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
V_3;: $(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a$;
V_4: $(\alpha\beta) a = \alpha(\beta a)$;
V_5: $1 \cdot a = a$, gde je 1 neutralni element operacije $\cdot$ polja $\boldsymbol{F}$.

Elementi skupa V su vektori.

Elementi skupa F su skalari.

Operacija $+ : V^2 \longrightarrow V$ je sabiranje vektora.

Operacija $\cdot : F \times V \longrightarrow V$ je množenje vektora skalarom.

Neutralni elemenat grupe $(V, +)$ naziva se nula vektor i označava sa $\mathbb{O}$ ili $\vec{0}$, a najčešće kada se zna o čemu se radi samo sa 0.

Ako je $\boldsymbol{V}$ vektorski prostor nad poljem $\boldsymbol{F}$, tada za svako $\alpha \in F$ i svako $a \in V$ važi:

- $\alpha \cdot 0 = 0$;
- $0 \cdot a = 0$;
- $\alpha \cdot a = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \ \vee\ a = 0$;
- $(-\alpha) a = -(\alpha a) = \alpha(-a)$;
- $(-\alpha)(-a) = \alpha a$;
- $(-1) a = -a$.

Neka je $\boldsymbol{V}$ vektorski prostor nad poljem $\boldsymbol{F}$. Tada je uređena četvorka $\boldsymbol{W} = (W, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ **vektorski potprostor** prostora $\boldsymbol{V}$ ako je $\emptyset \neq W \subseteq V$ i ako $\boldsymbol{W}$ jeste vektorski prostor nad poljem $\boldsymbol{F}$ u odnosu na restrikcije operacija sabiranja u V i množenja skalara iz F i vektora iz V.

Potprostor je vektorski prostor nad istim poljem kao i polazni vektorski prostor.

Nula vektor vektorskog prostora je nula vektor svakog njegovog potprostora.

Svaki vektorski prostor $\boldsymbol{V} \neq (\{0\}, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ ima bar dva potprostora, tzv. **trivijalna potprostora** $(\{0\}, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ i $(\boldsymbol{V}, +, \cdot, \boldsymbol{F})$.

Ako je $\boldsymbol{V} = (V, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ vektorski prostor nad poljem $\boldsymbol{F}$ i $\emptyset \neq W \subseteq V$, tada je $\boldsymbol{W} = (W, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ potprostor prostora $\boldsymbol{V}$ akko za svako $\alpha, \beta \in F$ i svako $x, y \in W$ važi $\alpha x + \beta y \in W$ (ili $\alpha x \in W$ i $x + y \in W$).

Neka je $\boldsymbol{V}$ vektorski prostor nad poljem $\boldsymbol{F}$. Vektor

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$$

je **linearna kombinacija** uređene n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ iz prostora $\boldsymbol{V}$, gde su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ proizvoljni skalari polja $\boldsymbol{F}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Skup svih linearnih kombinacija n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prostora $\boldsymbol{V}$ nad poljem $\boldsymbol{F}$ naziva se **lineal** n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i označava se sa $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Lineal $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\boldsymbol{V}$ je potprostor prostora $\boldsymbol{V}$.

Neka n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je **linearno zavisna** ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takvi da je bar jedan od njih različit od nule i $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$.

Neka n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je **linearno nezavisna** ako nije linearno zavisna.

Proizvoljna n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno zavisna akko je bar jedan od njenih vektora linearna kombinacija preostalih.

n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno nezavisna akko je njena linearna kombinacija jednaka nuli samo kada su svi skalari jednaki nuli.

n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno nezavisna akko se nijedan od vektora te n-torke ne može izraziti kao linearna kombinacija preostalih.

Za skup n različitih vektora $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se kaže da je linearno zavisan ili nezavisan ako je n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno zavisna, odnosno nezavisna.

Uređena n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\boldsymbol{V}$ **generiše** prostor $\boldsymbol{V}$, tj. generatorna je za $\boldsymbol{V}$ ako se svaki vektor iz $\boldsymbol{V}$ može predstaviti kao linearna kombinacija n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tj. ako je $L(a_1, a_2, \ldots, a_n) = V$.

Uređena n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\boldsymbol{V}$ je **baza** prostora $\boldsymbol{V}$ ako je B linearno nezavisna n-torka vektora i generiše prostor $\boldsymbol{V}$.

Uređena n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\boldsymbol{V}$ je baza prostora $\boldsymbol{V}$ akko se svaki vektor prostora $\boldsymbol{V}$ na jedinstven način može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz B.

Uređena n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\boldsymbol{V}$ je baza prostora $\boldsymbol{V}$ akko je ona maksimalno linearno nezavisna n-torka vektora u $\boldsymbol{V}$.

Uređena n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\boldsymbol{V}$ je baza prostora $\boldsymbol{V}$ akko je ona minimalna generatorna n-torka vektora u $\boldsymbol{V}$.

Proizvoljne dve baze $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ vektorskog prostora $\boldsymbol{V}$ imaju isti broj vektora, tj. $n = m$, i taj broj se naziva **dimenzija** vektorskog prostora $\boldsymbol{V}$ i piše $\dim(V) = n$.

Dimenzija prostora $(\{0\}, +, \cdot, \boldsymbol{F})$ je 0.

U ovim slučajevima kažemo da su vektorski prostori konačno-dimenzionalni.

Za beskonačno-dimenzionalni prostor $\boldsymbol{V}$ je $\dim(V) = \infty$.

Nula vektor ništa ne generiše osim samog nula vektora i nula prostora, te za svaki skup vektora važi $L(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0) = L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Svaki skup vektora koji sadrži nula vektor je linearno zavisan.

Važni primeri vektorskih prostora:

(1) Realan Euklidov prostor $\boldsymbol{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ uređenih n-torki realnih brojeva nar poljem realnih brojeva gde su operacije sabiranja vektora $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i množenja vektora skalarom $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definisane sa:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),\\ \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).\end{aligned}$$

Najvažnija baza ovog n-dimenzionalnog prostora je standardna baza $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ gde je

$$e_1 = (1.0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1) \; .$$

Još jedna baza ovog prostora je na primer $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ gde je

$$b_1 = (1.1, \ldots, 1), \quad b_2 = (0, 1, \ldots, 1), \quad \ldots, \quad b_n = (0, 0, \ldots, 1) \; .$$

(2) $\boldsymbol{Q}^n = (\mathbb{Q}^n, +, \cdot, \mathbb{Q})$ n-dimenzionalni vektorski prostor sa standardnom bazom $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ gde je

$$e_1 = (1.0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1) \; .$$

(3) $\widetilde{\boldsymbol{R}}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{Q})$ beskonačno-dimenzionalni vektorski prostor. $\mathbb{Q}^n$ je njegov potprostor.

(4) $\boldsymbol{C}^n = (\mathbb{C}^n, +, \cdot, \mathbb{C})$ n-dimenzionalni vektorski prostor sa standardnom bazom $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ gde je

$$e_1 = (1.0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1) \; .$$

(5) $\widetilde{\boldsymbol{R}}^n = (\mathbb{C}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ $2n$-dimenzionalni vektorski prostor sa standardnom bazom $E = (\widetilde{e}_1 . \widetilde{e}'_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}'_2 \ldots, \widetilde{e}_n, \widetilde{e}'_n)$ gde je

$$\widetilde{e}_1 = (1.0, \ldots, 0), \quad \widetilde{e}'_1 = (i, .0, \ldots, 0), \quad \widetilde{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \widetilde{e}'_2 = (0, i, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \widetilde{e}_n = (0, 0, \ldots, 1), \quad \widetilde{e}'_n = (0, 0, \ldots, i) \; .$$

$\mathbb{R}^n$ je njegov potprostor.

(6) Vektorski prostor realnih polinoma nad poljem realnih brojeva $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}] = (R[x], +, \cdot, \mathbb{R})$ gde su operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom poznate operacije sabiranja polinoma i množenja polinoma skalarom. Ovaj vektorski prostor je beskonačno-dimenzionalan sa standardnom bazom koju čine vektori:

$$x^0 = (1), \quad x^1 = (0, 1), \quad x^2 = (0, 0, 1), \quad x^3 = (0, 0, 0, 1), \quad \ldots$$

(7) Vektorski prostor realnih funkcija nad poljem realnih brojeva $\boldsymbol{R}^{\mathbb{R}} = \left(R^R, \oplus, \odot, \mathbb{R}\right)$ gde je $R^R = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, a operacije $\oplus : R^R \times R^R \longrightarrow R^R$ i $\odot : R \times R^R \longrightarrow R^R$ su definisane sa:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \oplus g)(x) &= f(x) + g(x), \quad f, g \in R^R,\\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \odot f)(x) &= \lambda \cdot f(x), \qquad f \in R^R.\end{aligned}$$

Ovo je beskonalno-dimenzionalni vektorski prostor.

(8) Za skup slobodnih vektora V i operacije sabiranja slobodnih vektora i množenja slobodnih vektora skalarem uređena četvorka $\mathbb{V} = (V, +, \cdot, \mathbb{R})$ je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Ovaj vektorski prostor je dimenzije 3, a njegova standardna baza je $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Svaka dva vektora ove baze su ortogonalna i svaki je dužine 1. Vektorski prostor slobodnih vektora je izomorfan sa vektorskim prostorom $\mathbb{R}^3$ pa ove prostore poistovećujemo. Izomorfizam je: $\varphi : V \longrightarrow R^3$, $\varphi\left(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}\right) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Dakle, da istaknemo još jednom:

- Ako je broj vektora jednak dimenziji vektorskog prostora da bi oni činili bazu dovoljno je da se pokaže samo da su linearno nezavisni ili samo da su generatorni, nije potrebno dokazivati oba.
- Ako je broj vektora veći od dimenzije vektorskog prostora, oni su uvek zavisni.
- Ako su vektori generatorni za neki vektorski prostor, njihov broj je veći ili jednak od dimenzije tog prostora.
- Ako su vektori linearno nezavisni u nekom vektorskom prostoru, njihov broj je manji ili jednak od dimenzije tog prostora.
- Ako su vektori linearno zavisni u nekom vektorskom prostoru, njihov broj je neodre]en u odnosu na dimenziju tog prostora.

Svaki vektor $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}) \in \mathbb{R}^n$ može se zapisati kao matrica kolona, tj.

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix},$$

a matrica $[a_{ij}]_{m\times n}$ se tada zapisuje kao

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Rang matrice jednak je dimenziji vektorskog prostora generisanog vektorima kolona te matrice.

Dakle, vektori se upišu u matricu kao kolone (pošto se svaki vektor može zapisati kao matrica kolone) i na taj način se dobije matrica čiji rang može da se izračuna. Taj rang jednak je dimenziji vektorskog prostora generisanog datim vektorima.

Primeri:

- n-torka linearno nezavisnih vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je baza tog prostora: DA NE
- generatorna n-torka vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je baza tog prostora: DA NE
- n-torka linearno nezavisnih vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je za taj prostor:
  a) uvek generatorna, b) nikad generatorna, c) nekad generatorna.
- generatorna n-torka vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je za taj prostor:
  a) uvek linearno nezavisna, b) nikad linearno nezavisna, c) nekad linearno nezavisna.
- $(n+1)$-torka vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je:
  a) uvek linearno nezavisna, b) uvek linearno zavisna, c) nekad linearno nezavisna a nekad linearno zavisna.
- n-torka vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je:
  a) uvek linearno nezavisna, b) uvek linearno zavisna, c) nekad linearno nezavisna a nekad linearno zavisna.
- $(n-1)$-torka vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je:
  a) uvek linearno nezavisna, b) uvek linearno zavisna, c) nekad linearno nezavisna a nekad linearno zavisna.
- $(n+1)$-torka vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je:
  a) uvek generatorna, b) nikad generatorna, c) nekad generatorna.
- n-torka vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je:
  a) uvek generatorna, b) nikad generatorna, c) nekad generatorna.
- $(n-1)$-torka vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je:
  a) uvek generatorna, b) nikad generatorna, c) nekad generatorna.

ZADACI

(1) U vektorskom prostoru $\boldsymbol{R}^3$ ispitati linearnu zavisnost i generatornost sledećih skupova vektora:
  (a) $b_1 = (0,1,0)$, $b_2 = (0,0,-1)$;
  (b) $b_1 = (3,0,0)$, $b_2 = (0,3,0)$,$b_3 = (0,0,3)$, $b_4 = (5,7,9)$;
  (c) $b_1 = (0,0,7)$;
  (d) $b_1 = (0,0,0)$, $b_2 = (5,3,1)$;
  (e) $b_1 = (5,5,5)$, $b_2 = (3,3,0)$,$b_3 = (2,0,0)$.

(2) Dati su vektori:
  (a) $a_1 = (4,4,3)$, $a_2 = (7,2,1)$, $a_3 = (4,1,6)$ i $b = (5,9,\alpha)$;
  (b) $a_1 = (2,1,0)$, $a_2 = (-3,2,1)$, $a_3 = (5,-1,-1)$ i $b = (8,\alpha,-2)$;
  (c) $a_1 = (-1,3,-4)$, $a_2 = (1,-3,4)$, $a_3 = (2,-6,8)$ i $b = (0,\alpha,-1)$.

  Odrediti realan parametar α tako da se vektor b može izraziti kao linearna kombinacija vektora a_1, a_2 i a_3.

(3) Ispitati linearnu zavisnost vektora:
  (a) $(-4,2,-1,3)$, $(1,-3,2,4)$, $(-2,4,3,-1)$, $(-3,5,1,-2)$;
  (b) $(1,1,2,1)$, $(1,-1,1,2)$, $(-3,1,-4,-5)$, $(0,2,1,-1)$.

(4) Dati su vektori: $a_1 = (3,1,1)$, $a_2 = (m,-1,0)$ i $a_3 = (0,1,m)$.
  (a) Za koju vrednost realnog parametra m skup $\{a_1, a_2, a_3\}$ predstavlja bazu prostora $\boldsymbol{R}^3$?
  (b) Za $m = 2$ napisati vektor $b = (4,6,8)$ kao linearnu kombinaciju vektora a_1, a_2 i a_3.

(5) Skup vektora $A = \{x, y, u, v\}$ čini bazu vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^4$. Da li je skup vektora $B = \{x+u, 2y+v, x+u-v, y-3u\}$ baza tog prostora?

(6) Dokazati da vektori $a = (2,0,0,0)$, $b = (0,-1,2,0)$, $c = (0,0,-3,0)$, $d = (-1,0,0,1)$ čine bazu vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^4$, a zatim napisati vektor $v = (1,2,-1,3)$ kao linearnu kombinaciju vektora a, b, c i d.

(7) Vektorski prostor V generisan je vektorima $v_1 = (a,1,1)$, $v_2 = \left(-a, a, -a^2\right)$ i $v_3 = \left(a^3, -a, 1\right)$. Naći njegovu dimenziju i bazu u zavisnosti od realnog parametra a.

(8) U zavisnosti od realnog parametra a odrediti bazu i dimenziju prostora S generisanog vektorima $v_1 = (a,a,a,a)$, $v_2 = (a,2,2,2)$, $v_3 = (a,2,a,a)$ i $v_4 = (a,2,a,3)$.

(9) Ispitati koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ čine potprostor prostora $\boldsymbol{R}^3$, i za one koji to jesu odrediti njihovu dimenziju:
  (a) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\right\}$;
  (b) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2\right\}$;
  (c) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\right\}$;
  (d) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\right\}$;
  (e) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1\right\}$;
  (f) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 0\right\}$;
  (g) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0,\ y = 0\right\}$;
  (h) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0,\ xy = 0\right\}$;
  (i) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z^2 = 0\right\}$;
  (j) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 = 0\right\}$.

(10) Za skup $\mathcal{R}_S$ rešenja homogenog sistema S linearnih jednačina dokazati da je potprostor vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^4$ i odrediti jednu njegovu bazu

$$S: \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & - & 2u & = & 0 \\ -2x & - & 5y & + & z & + & 4u & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 16z & - & 2u & = & 0 \end{array}.$$

(11) Za skup $\mathcal{R}_S$ rešenja homogenog sistema S linearnih jednačina dokazati da je potprostor vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^3$ i odrediti jednu njegovu bazu

$$S: \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \\ -5x & - & 2y & - & 13z & = & 0 \end{array}.$$

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE
Zadatak 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8, 11.9, 11.10, 11.11, 11.12, 11.13, 11.14, 11.15a, 11.16a, 11.17, 11.18