SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih je

$$S: \quad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

gde je $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uređena n-torka nepoznatih, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ su koeficijenti, a $b_i \in \mathbb{R}$ slobodni članovi, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ako je broj jednačina u sistemu jednak broju nepoznatih (tj. $m = n$) tada se sistem zove **kvadratni** sistem.

Ako su u sistemu svi slobodni članovi jednaki nuli (tj. ako je $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0,$) onda se sistem naziva **homogen** sistem.

Skup rešenja sistema S, u oznaci R_s, čine sve uređene n-torke brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ koje zadovoljavaju svaku jednačinu sistema.

U zavisnosti od broja rešenja sistema, tj. prirode sistema, sistem može biti:

(1) ODREĐEN - ima tačno jedno rešenje;
(2) NEODREĐEN - ima više od jednog rešenja;
(3) NEMOGUĆ (kontradiktoran, protivrečan)- nema rešenja.

Ako sistem ima bar jedno rešenje kaže se da je saglasan.
Homogen sistem sa $n \in \mathbb{N}$ promenljivih je uvek saglasan jer uvek ima bar jedno (trivijalno) rešenje $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Dakle, homogen sistem nikad nije nemoguć.

Primer:

a) $\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \end{array}$, ovaj sistem je nemoguć, tj. nema rešenja. $R_S = \emptyset$.

b) $\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ & & x_3 & = & 3 \end{array}$, ovaj sistem jw određen. $R_S = \{(1, 3)\}$.

c) $\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \end{array}$, ovaj sistem je neodređen, ima beskonačno mnogo rešenja. $R_S = \{(t, 2 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Dva sistema jednačina su ekvivalentna ako i samo ako su im jednaki skupovi rešenja.
Primenom elementarnih transformacijama na sistem linearnih jednačina dobija se sistem ekvivalentan polaznom sistemu.

Elementarne transformacije sistema linearnih jednačina su:

- zamena mesta jednačinama;
- množenje jednačine skalarom različitim od nule;
- množenje jednačine skalarom i dodavanje nekoj drugoj jednačini;
- promena mesta sabircima u jednačinama (iste nepoznate pišu se jedna ispod druge odnosno u istoj koloni).

Postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina

Gausov postupak (Gausov algoritam, Gausova metoda eliminacije)

Može se primeniti za izračunavanje proizvoljnog sistema jednačina.

Sastoji se u tome da se pomoću navedenih elementarnih transformacija koje očuvavaju ekvivalentnost sistema, dobije trougaoni oblik iz kojeg se lako izračunavaju nepoznate.

Primer: Gausovim postupkom, rešiti sistem linearnih jednačina

a) $\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & -5 \end{array}$.

Množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem drugoj jednačini dobija se

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & -5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 5 \\ & - & 10y & = & -20 \end{array}.$$

Iz druge jednačine sledi da je $y = 2$. Uvrštavanjem te vrednosti u prvu jednačinu dobija se $x = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s = \{(1, 2)\}$.

b) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array}$,

Množenjem prve jednačine sa -2 i dodavanjem drugoj jednačini, a potom množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem trećoj jednačini dobija se

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & y & & & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & - & 4y & - & 3z & = & -17 \end{array}.$$

Množenjem druge jednačine sa 4 i dodavanjem trećoj jednačini, dobija se

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -10 \\ & & & - & 19z & = & -57 \end{array}.$$

Dobijen je trougaoni oblik iz kojeg se iščitavaju rešenja. Iz treće jednačine sledi da je $z = 3$. Zamenom u drugu jednačinu dobija se $y = -10 + 4 \cdot 3 = 2$, a zamenom u prvu $x = 6 - 2 - 3 = 1$, tj. skup rešenja sistema je $R_s = \{(1, 2, 3)\}$.

Rešavanje sistema pomoću determinanti

Determinante se mogu primeniti samo za rešavanje kvadratnih sistema. Determinanta sistema S sa n promenljivih i n nepoznatih je:

$$D_S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kramerovo pravilo: Ako je determinanta kvadratnog sistema linearnih jednačina $D_S \neq 0$, sistem određen i njegovo jedinstveno rešenje je:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Big(\frac{D_{x_1}}{D_S}, \frac{D_{x_2}}{D_S}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D_S}\Big),$$

gde je

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Ako je $D_S = 0$ sistem je nemoguć ili neodređen. U tom slučaju se moramo vratiti na Gausov postupak i na taj način odrediti kakav je tačno sistem.

Za homogen kvadratni sistem linearnih jednačina S važi:

- $D_S \neq 0$, sistem ima samo trivijalno rešenje;
- $D_S = 0$, sistem je neodređen.

Primer: Kramerovim pravilom, rešiti sistem linearnih jednačina

a) $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 8 \\ 3x & + & 2y & = & -2 \end{array}$

Kako je

$D_s = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0,$

$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 2 = 14,$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 24 = -28,$

dobija se

$x = \dfrac{D_x}{D_s} = \dfrac{14}{7} = 2$ i $y = \dfrac{D_y}{D_s} = -\dfrac{28}{7} = -4,$

tj. skup rešenja datog sistema je $R_s = \{(2, -4)\}$.

b) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 7y & + & z & = & -8 \\ 3x & & & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & + & 5z & = & 0 \end{array}$

Kako je

$$D_s = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -7 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{matrix} = 0 + 14 + 15 - 0 + 10 + 105 = 144 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -8 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{matrix} = 0 + 0 + 5 - 0 - 40 + 35 = 0,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -8 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 10 + 16 + 0 - 2 - 0 + 120 = 144,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -7 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{matrix} = 0 - 14 - 120 - 0 - 10 - 0 = -144,$$

dobija se

$$x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{0}{144} = 0, \quad y = \frac{D_y}{D_s} = \frac{144}{144} = 1$$
$$\text{i} \;\; z = \frac{D_z}{D_s} = -\frac{144}{144} = -1,$$

tj. skup rešenja datog sistema je $R_s = \{(0, 1, -1)\}$.

ZADACI

(1) Rešiti sledeće sisteme linearnih jednačina:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 5z & = & 6 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array} ;$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 3y & - & 5z & = & 6 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array} ;$$

(c) $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 6 \\ 2x & + & y & = & 9 \\ 4x & + & 2y & = & 18 \end{array} ;$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array} ;$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & 2u & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & - & u & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & u & = & 5 \\ -x & - & y & + & 2z & + & u & = & 3 \end{array} ;$$

(f) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & - & 2u & + & 4v & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & 5z & + & u & + & 7v & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & + & 8u & + & 2v & = & 1 \end{array} .$$

(2) Odrediti realne parametre c i d tako da sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 3y & + & z & = & -5 \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ cx & + & 2y & - & z & = & d \end{array}$$

bude neodređen i rešiti ga u slučaju neodređenosti.

(3) Odrediti realan parametar b tako da sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & b \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}$$

bude nemoguć.

(4) U zavisnosti od realnog parametra a, diskutovati prirodu rešenja sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & (a-1)\,y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & az & = & a \\ & - & ay & + & az & = & 2 \end{array}$$

i rešiti ga u slućaju neodređenosti.

(5) U zavisnosti od realnog parametra a, diskutovati prirodu rešenja sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & (a+1)\,y & + & z & = & 2a \\ x & + & y & + & az & = & -a \end{array}$$

i rešiti ga u slućaju neodređenosti.

(6) U zavisnosti od realnog parametra a, diskutovati prirodu rešenja sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & (a+1)\,z & = & 3 \\ 5x & + & 2y & & & = & 1 \\ ax & & & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

i rešiti ga u slućaju neodređenosti.

(7) U zavisnosti od realnog parametra a, diskutovati prirodu rešenja sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} (a-1)\,x & & & & & = & 0 \\ x & + & (a-1)\,y & & & = & 0 \\ & & y & + & (a-1)\,z & = & 0 \end{array}$$

i rešiti ga.

(8) U zavisnosti od realnih parametara a i b, diskutovati prirodu rešenja sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & b \\ x & + & ay & + & 6z & = & -2 \end{array}$$

i rešiti ga u slućaju neodređenosti.

(9) U zavisnosti od realnih parametara ai b, diskutovati prirodu rešenja sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} -ax & & & - & 3z & = & 3b \\ x & + & (a+1)\,y & & & = & 1 \\ ax & - & 2y & + & 4z & = & -2 \end{array}$$

i rešiti ga u slućaju neodređenosti.

(10) U zavisnosti od realnih parametara ai b, diskutovati prirodu rešenja sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} (a-3)\,x & + & y & - & z & = & ab \\ -2x & + & 2\,(a-2)\,y & - & 2z & = & 3b \\ (a-2)\,x & + & 2y & & & = & b \end{array}$$

i rešiti ga u slućaju neodređenosti.

(11) U zavisnosti od realnih parametara a,i b diskutovati prirodu rešenja sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & & & + & bz & = & -a \\ & & (a+b)\,y & & & = & b \\ bx & & & + & az & = & 2a \end{array}$$

i rešiti ga u slućaju neodređenosti.

(12) U zavisnosti od realnih parametara ai b, diskutovati prirodu rešenja i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ -2ax & + & (a-3)\,y & + & az & = & b-2 \end{array}.$$

(13) U zavisnosti od realnih parametara ai b, diskutovati prirodu rešenja i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3az & + & 4u & = & 1 \\ ax & - & 2y & + & z & - & 2u & = & b \end{array}.$$

(14) U zavisnosti od realnih parametara ai b, diskutovati prirodu rešenja i rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & (a-2)\,y & + & az & + & (a-1)\,u & = & 1 \\ ax & + & (a-2)\,y & + & az & - & u & = & b \\ ax & + & (a-2)\,y & - & z & + & au & = & b \end{array}.$$

ZA VEŽBU:IZ SKRIPTE
Zadatak 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9,
teži: 9.10, 9.17